TECHNO REVIEW | Vol. 13, No. 1, 2023 | ISSN 2695-9933
International Technology Science and Society Review / Revista Internacional de Tecnología Ciencia y Sociedad
https://doi.org/10.37467/revtechno.v13.5005

¿EXISTEN LAS MÁQUINAS ACELERADAS DE TURING? Paradojas y posibilidades lógicas

Do Accelerating Turing Machines Exist?
Paradoxes and Logical Possibilites

JOSÉ ALEJANDRO FERNÁNDEZ CUESTA [1 2]
[1] Universidad Rey Juan Carlos, España
[2] Universidad Complutense de Madrid, España

KEYWORDS

Accelerating Turing Machines
Super-task
Paradoxes
Existence
Logical Possibility
Modal Analysis
Philosophy of Computation

ABSTRACT

Accelerating Turing Machines (ATMs) are devices capable of executing super-tasks. However, the mere exercise of definition has generated several paradoxes. This paper will define the notions of super-task and ATM in a comprehensive way and will clarify what should be understood in a formal-logical context when asking about the existence of an object. Following the distinction between logical and physical possibilities, the paradoxes will be dissolved and it will be concluded that ATMs are possible and exist as abstract objects.

PALABRAS CLAVE

Máquinas Aceleradas de Turing
Súper-tareas
Paradojas
Existencia
Posibilidad Lógica
Análisis Modal
Filosofía de la Computación

RESUMEN

Las máquinas aceleradas de Turing (ATMs) son dispositivos capaces de ejecutar súper-tareas. Sin embargo, el simple ejercicio de definirlas ha generado varias paradojas. En el presente artículo se definirán las nociones de súper-tarea y ATM de manera exhaustiva y se aclarará qué debe entenderse en un contexto lógico-formal cuando se pregunta por la existencia de un objeto. A partir de la distinción entre posibilidades lógicas y físicas se disolverán las paradojas y se concluirá que las ATMs son posibles y existen como objetos abstractos.

Recibido: 16/ 02 / 2023
Aceptado: 20/ 05 / 2023

1. Introducción

Existe una serie de presuntos dispositivos computacionales acelerados capaces de ejecutar tareas Turing-computables llamados *máquinas aceleradas de Turing* [1] cuya definición ha resultado enormemente controvertida. En el simple ejercicio de tratar de caracterizarlos se ha generado una lista de paradojas de tipo lógico que han despertado todas las reacciones posibles frente a dichos dispositivos: afirmando su existencia, rechazándola o matizándola. En el presente artículo nos proponemos sistematizar lógicamente estas paradojas y proponer una metodología de solución lógicamente aceptable.

En primer lugar, definiremos la idea de *súper-tarea* como el objeto de ejecución de estas *máquinas de Turing aceleradas* proponiendo una definición lógica exhaustiva de las súper-tareas a partir de las conocidas como *series de Zenón* y haciendo uso de la aritmética transfinita estándar. En segundo lugar, haremos lo mismo con los propios dispositivos, las máquinas aceleradas, para tratar de definirlas también de manera exhaustiva.

Una vez hayamos logrado esto, clarificaremos el significado de la pregunta acerca de su existencia basándonos en la interpretación estándar del cuantificador existencial del cálculo de predicados de primer orden. Así, ofreceremos argumentos para diluir las paradojas que surgen tanto de la definición de las súper-tareas como de las ATMs. Esto último lo haremos a partir de una distinción modal poco problemática: la que interpreta los operadores modales estándar como posibilidad y necesidad *lógicas* o *aléticas* y *físicas*[2]. Desde aquí, estudiaremos todos los posibles argumentos que se han esgrimido en contra de la posibilidad lógica de tales dispositivos para concluir que sí es legítimo caracterizarlas como lógicamente posibles. Finalmente sentaremos las bases para formular correctamente la pregunta acerca de su posibilidad física en cuanto que implementación espacio-temporal.

Todo ello lo haremos interconectando debates propios de la filosofía de la lógica y de las matemáticas, así como otros tantos metafísicos pertinentes que, hasta ahora, no se han relacionado de manera exhaustiva ni directa con el problema de las ATMs y su ejecución de *súper-tareas*.

2. Súper-tareas: *series de Zenón* y la paradoja Littlewood-Ross

La idea de *súper-tareas* (*super-tasks*) se popularizó gracias al trabajo de Thomson (1954), quien las definió como tareas –computacionales– cuya ejecución completa o finalización supondría la realización de una cantidad *infinita* de sub-tareas en un intervalo de tiempo finito. Sin embargo, el mismo Thomson pensó también que existían «razones para suponer que no es posible realizar súper-tareas» (1954, p.5)[3], es decir, que tanteó la *imposibilidad* de que dichas tareas fueran realizadas. En otras palabras, la *imposibilidad* de que *nada* ni *nadie* fuera capaz de llevarlas a cabo con éxito. La discusión acerca de la posibilidad o imposibilidad de realizar este tipo de tareas infinitas es el antecedente inmediato a la pregunta acerca de la posibilidad o imposibilidad de concebir, por esto último, una máquina o dispositivo capaz de resolverlas.

Una máquina acelerante de Turing –ATM, en adelante, por sus siglas en inglés– es uno de los dispositivos diseñados –el principal– *para* resolver o ejecutar *súper-tareas*, al menos, potencialmente y, por tanto, antes de introducir su definición es interesante que nos detengamos en analizar con mayor detalle estas tareas para cuya resolución fueron, de hecho, concebidas la mayoría de dichas máquinas tipo-Turing[4]. Esto es importante ya que, si no caracterizamos con rigor la definición de *súper-tarea* y, en base a dicha definición, construimos la de una ATM, podremos incurrir, simplemente, en una petición de principio: entendiendo que una ATM es aquella máquina capaz de resolver *súper-tareas* y una *súper-tarea* aquello que es capaz de ejecutar exitosamente una ATM[5]. No solo sería una definición viciada, con

[1] O, más habitualmente, «máquinas de Turing aceleradas». Sin embargo, parece preferible mantener el primer orden para poner de relieve la dificultad acerca de si una máquina *acelerada* en los términos que veremos, será o no, una máquina de Turing.
[2] Fernández (2022).
[3] Más adelante analizaremos con detalle el experimento mental de la *lámpara de Thomson*, utilizado, al menos en un primer momento como argumento en contra de la posibilidad de resolver *súper-tareas* y, por tanto, como argumento en contra de la existencia de cualquier tipo de ATM.
[4] Puesto que ninguno de estos dispositivos se ha construido aún, podemos hacer una generalización conceptual y llamarlos a todos *ATMs* sin que esto suponga una pérdida de información, por el momento, preocupante.
[5] Algo especialmente peligroso cuando veamos que en la definición de las *súper-tareas* surgen varias paradojas.

el *definiendum* incluido en el *definiens*, sino que sería propiamente una *petición de principio* por cuanto hemos mencionado que una *súper-tarea*, en los términos propuestos por Thomson (1954), no parece realizable, lo que llevaría indefectiblemente a concluir que una ATM *no parece implementable*. Y esto, además, debemos hacerlo en términos lo suficientemente generales como para poder plantear la pregunta en torno a su existencia –no solamente atendiendo a tal o cual *súper-tarea* concreta–.

Una *súper-tarea*, por tanto, no es más que la resolución de una tarea computacional que incorpora *infinitas* ejecuciones[6], pero que además lo hace durante un intervalo de *tiempo* finito. Tal y como expone Shagrir (2004), una ATM no es más que una máquina tipo-Turing[7] capaz de resolver *súper-tareas* bajo unas condiciones específicas. Probablemente, el primer ejemplo histórico y filosóficamente relevante de *súper-tarea* lo encontremos, de manera implícita, en algunas de las conocidas como paradojas o aporías de Zenón. Es por esto por lo que las ATMs, a veces, son llamadas también *máquinas de Zenón*, aunque esta nomenclatura está hoy en desuso.

El nombre deriva de las famosas paradojas planteadas por Zenón de Elea (DK 29 A 25) conocidas como «el Estadio» (DK 29 A 25), «Aquiles y la tortuga» (Arist. *Fís.* 9, 239 b 14), «la flecha» (DK 29 A 27) y «las filas» (DK 29 A 28). Paradojas que se presentan como una serie de argumentos cuya resolución parecería llevar al lector a la conclusión de que *el movimiento no existe* –más que como aparente– a partir de una serie de procesos mecánicos infinitesimales que jamás convergen en un resultado positivo[8]. Benacerraf (1965) popularizó llamar a los argumentos de Thomson «zenonianos» y, así, distinguió que «mientras que Zenón trató de mostrar que realizar una sola tarea era imposible, sus correctores del siglo XX se conforman con retirarse a la posición en la que, aunque las tareas individuales puedan estar bien, no debemos tener demasiadas» (p. 767), haciendo alusión a la postura de Thomson en contra de la permisibilidad de *súper-tareas.*

Un buen punto de partida para abordar la discusión en torno a la posible existencia de estos dispositivos capaces –presuntamente– de ejecutar *súper-taras* es, sin duda, la caracterización a partir de una definición lógicamente exhaustiva tanto de la idea de máquina acelerada *per se*, como de *súper-tarea*. Y es que, en base a lo que acabamos de mencionar, la definición de *súper-tarea* exige la incorporación de infinitas sub-tareas realizables en un intervalo de tiempo finito *bajo unas condiciones específicas*. Pues bien, está claro que no debemos definir la noción de *súper-tarea* aludiendo a un programa capaz de ejecutarlas si no queremos incurrir en la petición de principio antes mencionada.

Lo que debemos preguntarnos, en primer lugar, es si podemos caracterizar exhaustivamente y sin ambigüedad dichas condiciones específicas[9] dentro de un contexto lógico aceptable[10] para poder definir, por un lado, una ATM y, por otro, una *súper-tarea*. Para ello seguiremos el esquema básico propuesto por Steinhart (2007) y buscaremos una caracterización matemáticamente exhaustiva. Steinhart propone comenzar definiendo una progresión infinita, en general, como un conjunto ordinal y el primer ordinal límite como primer transfinito del modo habitual[11]. Con esto presente se recuperan las «tres reglas de Cantor» para generar números[12] expuestas en su versión más simplificada[13]:

---

[6] Por ahora, este conjunto de tareas de cardinalidad *infinita* puede entenderse tanto en sentido clásico –numerable– como en el sentido de una cantidad no numerable. Más adelante volveremos sobre esta cuestión.

[7] O, lo que es lo mismo, Turing-computable o T-computable, tal y como lo define Prida (2004, p. 37).

[8] Cfr. Hamkins (2002) o Shagrir (2007).

[9] La noción de *tarea* Turing-computable se entiende como caracterizada exhaustivamente por definición –cfr. Prida (2004). Igualmente, la idea de intervalo temporal se entiende como bien definida ya sea en términos conjuntistas –en cuanto que intervalo– o físico-funcionales –en cuanto que temporal–. Debemos destacar que, además, en ambos casos, a nivel lógico trabajaremos con una misma variable temporal t acompañada de subíndices pertenecientes a una familia de subíndices I al modo habitual, por lo que la distinción será trivial.

[10] La aceptabilidad de nuestro cálculo pasará por la aceptación usual de una caracterización metalógica mínima deseable: un cálculo de predicados de primer orden estándar con identidad bastará para tal efecto. Aunque, siendo estrictos, podemos asumirlo también sin identidad.

[11] Definible en el cálculo de primer orden antes mencionado. Esto es algo que se puede observar remitiendo a cualquier manual de teoría de conjuntos: cfr., por ejemplo, Alonso *et al.* (2007).

[12] Cfr. Drake (1974), Hamilton (1982).

[13] Asumimos una lógica de primer orden con identidad estándar y sus modelos habituales. Todas las estructuras con las que trabajaremos, tanto a nivel físico como conjuntista, tienen sus modelos en estructuras de dicha semántica. Asumiendo esto, evitaremos, en la medida de lo posible, utilizar axiomas conjuntistas controvertidos de forma que, en principio, todo lo dicho en adelante regirá igualmente tanto en ZFC como en ZFC^{+}.

(1) Regla inicial: $\emptyset = 0$.
(2) Regla de sucesión: $\forall n \, \exists m \, \big((m = n+1) \wedge (m > n)\big)$

Existe un ordinal, $n+1$, definible como el sucesor de n para todo n. Cada ordinal $n+1$ es el conjunto cuya cardinalidad corresponde a los ordinales menores que él mismo de la manera habitual:

$$\{\emptyset\} = \{0\} = 1; \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} = \{0,1\} = 2; \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\} = \{0,1,2\} = 3; \ldots$$

(3) Regla de límite: $\forall n \, \exists m \, \Big((m > n) \wedge \big(\forall x \in m (m > x)\big)\Big)$

Existe un ordinal límite, ω, mayor que todos los ordinales de la serie como límite mayor que cualquier ordinal de cardinalidad finita. En pocas palabras, se incluye el conjunto de todos los ordinales menores que él mismo, es decir, el conjunto de los ordinales y, en cuanto que tal, este tendrá, a su vez, un nuevo sucesor[14].

Con este esquema simple –pero exhaustivo– podemos caracterizar, siguiendo a Steinhart (2007), una *progresión de Zenón* como paso inmediatamente anterior de la definición técnica de *súper-tarea* a través de la aplicación de las tres reglas anteriores[15].

Definimos, en primer lugar, una progresión como la serie de objetos definida bajo las tres reglas siguientes:

(1’) Regla inicial: se asocia a la constante 0 con un objeto.
(2’) Regla de sucesión: se asocia a cada $n+1$ con un objeto.
(3’) Regla de límite: se asocia el límite ordinal, ω, con un objeto.

Y así podemos caracterizar ya, efectivamente, una *progresión de Zenón* como:

$$(1')\ Z_0 = 0 \qquad (2')\ \forall_{Z_n}\ \exists_{Z_{n+1}} \left(Z_{n+1} = Z_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \qquad (3')\ Z_\omega = 1 : \lim_{n \to \omega} (\mathrm{Z_n})$$

La progresión $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, \ldots, Z_{n+1}, \ldots, Z_\omega$ es una progresión de Zenón ya que, como señala Steinhart, «si pensamos en las fracciones en la progresión de Zenón como puntos en una línea espacial, estos son *puntos de Zenón*. Si pensamos en ellos como fracciones de un intervalo de tiempo, son *instantes* de Zenón» (2007, p. 27). Y estas progresiones son útiles para poder definir una *súper-tarea* por cuanto:

> Una *súper-tarea* es una serie infinita de operaciones realizadas en alguna región finita del espacio-tiempo. Aunque algunas súper-tareas están mal definidas –y por lo tanto parecen ser paradójicas–, muchas otras súper-tareas tienen definiciones recursivas consistentes y convergen en objetos bien definidos en límites transfinitos. (2007, p.27)

Este será, de hecho, el punto central de toda *súper-tarea*: su resultado.

Figura 1: Esquema de representación de la evolución en cada paso de la ejecución de una súper-tarea con el tiempo de ejecución para cada una de dichas tareas. Es fácil observar que se logra capturar matemáticamente a partir de la familia de subíndices, I, de cada paso P_n, la definición exhaustiva de una sucesión tipo Zenón y, por tanto, de ejecución de infinitas tareas en un intervalo de tiempo finito. Esto último queda reflejado en el hecho de que el último tiempo de ejecución del último paso en el límite transfinito es, precisamente, ninguno.

[14] Algo que incluimos en la notación estándar con la cardinalidad habitual desde los naturales: $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$.
[15] Cfr. Earman y Norton (1996) y Koetsier y Allis (1996).

	Paso de ejecución (P_n):	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	…	∞
$t = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$						$\lim_{n\to\infty} P_n$	
	Tiempo de ejecución (t):	$t = 1$	$t = 0.5$	$t = 0.25$	$t = 0.125$	…	0
						$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}$	

Fuente: elaboración propia

Es fácil, por tanto, pensar en una *súper-tarea*, realizada en un intervalo temporal cerrado [0,1],como «una progresión de tareas finitamente complejas –finitarias– realizadas en distintos intervalos de Zenón» durante el mismo intervalo temporal. La segunda tarea se realizaría en 1/2 que la primera, la tercera en 1/4, la cuarta en 1/8, etc. siguiendo el esquema de la Figura 1. Esta manera de caracterizar las *súper-tareas* nos permite, desde un primer momento, conectar el debate en torno a su posible resolución con otros problemas o paradojas filosóficamente relevantes. Especialmente cuando planteemos la pregunta por la existencia de las ATMs. Con lo dicho hasta ahora *solamente* logramos caracterizar el *proceso* que supone la ejecución –infinita– de la *súper-tarea*, ¿qué pasa con su resultado?

Hablemos de la conocida como paradoja Littlewood-Ross[16]. Imaginemos que tenemos un jarrón o una urna vacíos –con capacidad de almacenamiento infinito– e infinitas bolas numeradas. Realizaremos un número infinito de pasos en cada uno de los cuales añadiremos 10 bolas a la urna y retiraremos una. Así, a un minuto de las 12 pm, las bolas numeradas del 1 al 10 se introducen y se retira la número 1. A medio minuto de las 12, las bolas 11-20 se introducen y se retira la bola número 2. A un cuarto de minuto se introducen de la 21 a la 30 y se retira la número 3, etc.

La *paradoja* surge al preguntarnos ¿cuántas bolas quedan en el jarrón a las 12:00 pm?[17] Lo importante es que cada uno de los pasos se realiza en un proceso acelerado de forma que el paso *n* se realiza en 2^{-n} pasos antes del *output*, es decir, estamos ante una *súper-tarea* en una serie ordenada de Zenón. Y ahora, por primera vez nos preguntamos, no por el transcurso de la serie transfinita, sino por su resultado: ¿cuál es el estado final? Esta es una versión de la conocida como *lámpara de Thomson*[18] que veremos más adelante. La versión Littlewood-Ross nos permite plantear la paradoja desde una serie de perspectivas interesantes.

Las respuestas que podemos ofrecer a la pregunta por el estado del jarrón son muy variadas, pero podemos, *grosso modo*, agruparlas en las opciones[19]:

1. Negar que sea una pregunta: podemos razonar que sea una pregunta ilegítima hasta que aseguremos la posibilidad de implementación de dicho proceso computacional y, en caso de no lograrlo nunca o, peor aún, plantear que sea imposible, rechazarla como *pseudo-pregunta*[20]. El presente artículo se podría leer en esta clave –aunque no exclusivamente– si se entiende que aquí por *resultado* nos referimos a *estado físico*. Se bloquearía o bien con cierta precaución metodológica, o bien con la distinción modal que introduciremos, el surgimiento de cualquier paradoja al deshacer los términos problemáticos en que se plantea esta pregunta: sobre esto volveremos más adelante.

[16] Littlewood (1953), Ross (1988).
[17] Veremos otra versión más sencilla de este problema cuando tratemos la lámpara de Thomson.
[18] Basta con apuntar, por el momento, que esta consiste en una lámpara con un interruptor que pulsado una vez la enciende y pulsado de nuevo apaga la lámpara. Tras la ejecución de una *súper-tarea* que consiste en infinitas pulsiones del interruptor, la pregunta que se plantea Thomson (1954) es ¿está la lámpara encendida o apagada?
[19] Seguimos la distinción de Hume entre respuestas *directas* y *escépticas* popularizada por Kripke (1982) a raíz de la paradoja del seguimiento de reglas explicitada por Wittgenstein (1953, § 201).
[20] Al estilo del neopositivismo clásico: Russell (1918, 1924), Carnap (1932) y Schlick (1930).

2. Afirmar que la urna se encuentra vacía: esta es la propuesta original de Ross (1988). De hecho, la paradoja original se plantea en estos términos. Como señalan Allis y Koetsier (1991, p. 188), «la respuesta es sorprendente porque durante el experimento el número de bolas en la urna no deja de crecer sobre todos los límites [para ser precisos: para todo n, a $\frac{1}{2}^{n-1}$ minutos[21] de las 12 p.m., hay $9n$ bolas en la urna] ¡Sin embargo, a las 12 p.m. la urna está repentinamente vacía! Esto es lo que llamamos la *Paradoja de Ross*». En este caso sí que se admite la paradoja, pero se adoptaría una postura escéptica al respecto: lo paradójico es la respuesta a la pregunta, no la pregunta misma y la respuesta, en cuanto que tal, cierra el debate. Ahora solamente queda un ejercicio de interpretación[22]. Ross planteó una versión probabilística de esta respuesta basada en la uniformidad de selección aleatoria de una bola mostrando que la probabilidad para cualquier bola extraída de la urna a las 12 p.m. era 0 y utilizando la *desigualdad de Boole* para mostrar que, tomando una suma numerable sobre el total de bolas, la probabilidad de que la urna estuviera vacía a las 12 p.m. era exactamente 1 (Ross (1988, p. 46)).
3. Afirmar que la urna contiene infinitas bolas: admitiendo que el proceso es posible y argumentando de la siguiente manera: como en ningún paso –tarea– disminuye el número de bolas respecto del paso anterior y el proceso de incremento continúa hasta el infinito, estaríamos ante el mismo caso en el que nos encontramos al contar los números naturales saltando todos aquellos que, por ejemplo, empiecen por la letra «d». Cada x números llegaríamos a uno que cumpliese $D(n)$ y que tendríamos que eliminar: $\neg\exists x \in \mathbb{N}\big(D(x)\big)$. Sin embargo, la cardinalidad restante sigue siendo aún infinita –numerable si además estamos en los naturales–. Y esto se puede transformar en una asunción paradójica si se demostrase que de este experimento uno puede concluir tanto que *está vacía* como que *está llena* a las 12 p.m.

La primera manera de hacer esto último es la obvia: como en el caso anterior, 2, teníamos que el resultado era *vacía* y ahora el resultado es *llena*, hemos topado con una contradicción. Pero esta comparativa es obviamente criticable ya que esta tercera respuesta *sustituiría* a la segunda y no se llegaría a unir con ella en una conjunción: se suprime la simultaneidad de 2 y 3 y, por tanto, la contradicción derivada de afirmar ambas. Uno no puede admitir la respuesta 3 como la interpretación correcta y, al mismo tiempo, mantener 2: esta tercera respuesta se plantea como una *corrección de* 2.

Es más, si se toma este análisis como un argumento en contra de 2 centrando la atención en el *salto* que se produciría entre cualquier instante arbitrariamente pequeño e infinitesimalmente anterior a las 12 p.m. podríamos volver, en el mejor de los casos, de nuevo a 1: explorar los límites de este salto y la imposibilidad física que supondría tal recorte infinitesimal –por debajo del tiempo de Plank[23] es algo que dejamos para otro momento. Este salto, de hecho, es uno de los puntos clave[24].

Pero se puede conseguir la contraposición de manera legítima de otra forma: modificando levemente el experimento para que las tareas de cada *súper-tarea* sean *las mismas* y se pueda generar una contradicción. Procedamos exactamente igual que al principio solo que añadiendo únicamente las bolas 1-9 en el primer paso, 11-19 en el segundo, 21-29 en el tercero, etc. Ahora, además, en lugar de extraer las bolas numeradas 1, 2, 3, … en cada paso sucesivo, simplemente les añadimos un cero a cada una de ellas y las movemos a la posición que les correspondería cardinalmente hablando. Por ejemplo, la bola 1, en el primer paso, pasa a ser la bola 10 y a ocupar el *décimo* puesto en la lista; la dos pasa a ser la 20 y a ocupar la *vigésima* posición; la 3 pasa a ser la 30, etc. Si ahora nos preguntamos cuántas bolas contendrá la urna a las 12 p.m. es fácil concluir que serán infinitas.

Y tenemos un problema al compararlo con el caso anterior puesto que, tal y como señalan Allis y Koetsier:

> Nos damos cuenta de que para todo n, a $\frac{1}{2}^{n-1}$ minutos de las 12 p.m., los contenidos de la urna en los dos experimentos son los mismos. En ambos experimentos tenemos a un minuto de las 12 las

[21] Obviamente, la unidad de tiempo es indiferente: podríamos hablar de minutos, segundos, horas, etc. Por esto mismo se hablará indistintamente de *minutos*, …, *momentos* e *instantes*.
[22] Cfr. *supra* nota a pie de pág. 17.
[23] Como límite físico.
[24] Pensemos que la ATM finaliza su proceso en el instante t_2. Una manera sencilla de caracterizar este salto es simplemente tomando la *súper-tarea* como una función especificada como continua en el intervalo [0,2), pero no especificada en 2: cfr. Shagrir (2004).

> bolas etiquetadas del 2 al 10 en la urna, en ambos experimentos tenemos a medio minuto de las 12 p.m. las bolas etiquetadas del 3 al 20 en la urna y así sucesivamente. Los dos experimentos parecen ser equivalentes en lo que respecta a los contenidos de la urna: en cada instante anterior a las 12:00 ponen de manifiesto exactamente la misma situación en el interior de la urna. Sin embargo, en el primer experimento la urna está vacía a las 12 pm mientras que en el segundo experimento la urna contiene una cantidad infinita de bolas a las 12 pm. Esto suena paradójico. (1991, pp. 188-189)

Por tanto, podemos distinguir en 3, a su vez, tres posibles posturas desde esta modificación:

3.1. Al entrar en contradicción con 2, debemos rechazar 2, igual que antes, como resultado inválido y concluir, simplemente que la urna está llena. No hay paradoja y la modificación de 3 sería una versión refinada y más fuerte para negar 2. De nuevo, no habría paradoja, sino un contraargumento.

3.2. Al generar una contradicción de alguna manera más legítima se deberá dar automáticamente un salto a 1 o 5. En contra de lo que proponen Allis y Koetsier (1991, 1995), esta modificación o versión refinada no explicita, en sí misma, una postura frente a la lectura de la paradoja. Solo volvería a afirmar: *estamos ante una paradoja*.

3.3. Una tercera alternativa, ausente en todas las discusiones relativas a las ATMs, es la de introducir una perspectiva paraconsistente amplia o, en concreto, dialeteísta y admitirla como contradicción legítima, argumento a favor del propio dialeteísmo, e incluirla en un *esquema de cercamiento* (*inclosure schema*). Más adelante también tendremos la oportunidad de decir algo acerca de esta alternativa[25].

4. Afirmar que la urna se encuentra vacía –versión refinada contra modificación de 3–: efectivamente, para complicar todo aún más, existe otra vía para reintroducir que la urna se encuentre vacía a las 12 p.m. Ahora podremos leer este argumento refinado tanto como una nueva versión de 2 –réplica a la versión refinada de 3– o bien como una nueva versión de 3 definiendo una paradoja aún más fuerte que la basada en la contraposición respecto de 2.

   La idea ahora es, simplemente, identificar los lugares que ocuparán dentro de la urna cada una de las bolas y asignar un número a cada una de estas posiciones. Desde aquí se ejecuta el experimento exactamente igual que en 3: en cuanto una bola sea re-etiquetada dejará un hueco vacío –ahora numerado–. En este caso, puede que el menos intuitivo de todos, no solamente tenemos una contradicción y una paradoja de análisis, sino que nos enfrentamos a un problema epistemológico interpretativo añadido por el que merece la pena incluir la postura 4 separada de 2: tenemos que introducimos infinitas bolas en la urna, que ninguna abandona jamás esta y, sin embargo, tenemos que esta terminaría estando vacía[26].
5. Solución directa[27]: hay un error de planteamiento en alguno de los puntos en los que se plantea. La versión más fuerte para esta versión se podría subsumir bajo 1 y negar directamente el propio experimento mental en cuanto que tal: es decir, en cuanto que lógicamente posible. Benacerraf (1962) planteó en este punto la idea de *subespecificación* en cuanto que atendiendo al salto entre el instante arbitrario anterior a las 12 p.m. y el *output* como imposible de generarse. Esta versión claramente puede entenderse tanto en un sentido fuerte –para toda *súper-tarea*– en 1 o, al menos, como una solución para este ejemplo concreto como una respuesta pertinente. Mientras que Thomson plantea que la pregunta por el estado de la lámpara es imposible –siendo el representante paradigmático de 1–, Benacerraf matiza la generalidad de esta respuesta y

[25] Priest (2014).

[26] Sin embargo, despreciamos para los argumentos principales la caracterización de una situación como intuitiva o anti-intuitiva: nos alejamos (i) en un sentido formal de posturas *relevantistas* –en lo que respecta a la implementación de formalismos en lecturas de cualquier lenguaje natural– y (ii) en un sentido metafísico de posturas *intuicionistas* –en sentido amplio pero ligadas a los programas de Brouwer, Heyting, Dummet, etc.–. Esto se justifica en que tenemos un gran catálogo de *aparentes paradojas* que, sin embargo, no lo son más que a una interpretación descontextualizada en lenguaje natural o ligada a una epistemología clásica –v.gr. kantiana– como puedan ser la trompeta de Torricelli –como ejemplo de lo primero– o la diagonalización de Cantor y la cardinalidad de los reales –como ejemplo de lo segundo–.

[27] Cfr. *supra* nota a pie de pág. 17.

argumenta que es imposible de responder, al menos, con la información de la que disponemos en el enunciado. Van Bendegem (1994) planteará algo muy parecido. Allis y Koetsier (1991, p. 190) siguen a Benacerraf en una versión moderada de la negativa y proponen las modificaciones fuertes que hemos visto en una versión generalizada geométrica para intentar eliminar la caracterización paradójica de cualquier *súper-tarea* y, por tanto, de toda ATM tratando de explicitar la información que faltaría y generaría la *subespecificación* pero sin lograr llegar a explicar los problemas 2-4 con experimentos matemáticamente equivalentes.

Así, en la línea de admisión de la *subespecificación* por la que faltarían datos relevantes para poder responder, se pueden separar, de nuevo, distintas posturas:

5.1. El orden de ejecución de las operaciones no es simétrico: en este caso –pero también en el de la lámpara de Thomson y, en general, cualquier *súper-tarea*–, no es lo mismo retirar las bolas como se propuso en 4, como versión fuerte de 2, ya que la urna quedará vacía, que si, por ejemplo, se eliminan primero la 10, luego la 20, luego la 30, etc. en cuyo caso volvería a haber infinitas bolas una vez más. Allis y Koestier (1991, p. 188) admiten que hace falta explicitar estos datos y toman esta asunción como un error en el planteamiento original de Ross (1988). Respecto del tercer experimento en que añadimos en la jarra las posiciones cardinales numeradas con el orden de los naturales, las bolas con etiqueta siempre tendrán que ocupar el lugar con la etiqueta correspondiente –el experimento transcurría igual que en 3– pero las tres versiones del experimento de la urna se basan una «interpretación cinemática y un principio de continuidad» (p. 190). Por tanto, lo que quedaría es definir las súper-tareas en un espacio euclídeo con infinitos elementos rígidos materiales –asunción planteada en las tres versiones anteriores– y generalizar una caracterización de las *súper-tareas*. Esto último podrá servir, entre otras cosas, para volver a 1 y conectar las investigaciones lógica y física.

5.2. También tenemos la postura de Tymoczko y Henle (1995), quienes proponen estudiar esta *súper-tarea* concreta como el límite inferior de una sucesión. Siendo n el número final deseado de bolas en el jarrón $n \geq 0$ y siendo i el número de la tarea que se está ejecutando en un instante concreto $i \geq 1$ el procedimiento se puede caracterizar de la siguiente forma:

(1) Coloque las bolas numeradas de $10 \cdot i - 9$ a $10 \cdot i$ en la urna, defina una operación de eliminar bolas, x^{elim}, para cualquier bola x[28].

(2) $(i \leq n) \rightarrow (2 \cdot i)^{elim}$

(3) $(i > n) \rightarrow (n + i)^{elim}$

(4) Las primeras n bolas impares no se eliminan de la urna, pero todas las mayores o iguales a $2n$ sí.

Por tanto, las bolas que permanecen en el jarrón son exactamente n.

El principal problema de este argumento es que aún mantiene un cierto principio de *subespecificación* que, al contrario de lo que sucedía en la respuesta de Allis y Koestier (1991), no permite caracterizar *una* respuesta concreta. Por esto mismo lo incluimos como 5.2. y no directamente en 2, 3 ni 4. La definición formal anterior, además, se puede extender a la *cinemática* de Allis y Koestier (1991, 1995) e incluso compatibilizarse con 1. Aun así, merece la pena destacar que: (i) es una definición concreta para la *súper-tarea* específica de la urna y las bolas –no es un caso general–; (ii) puede adolecer de una cierta petición de principio[29] al asumir que el resultado tendrá una cardinalidad concreta n, algo que iría en contra de la caracterización de las *súper-tareas* en series de Zenón; (iii) la formulación en dos condicionales es claramente problemática cuando admitamos la posibilidad formal del antecedente negado y el consecuente afirmado –entre otras– y, finalmente (iv) al no poder despejar, precisamente, la constante n a través de ningún procedimiento generalizado, no resuelve la paradoja, sino que se limita a formalizar el proceso del que se derivaría de manera más o menos problemática.

Pero todas estas respuestas generales –salvo en lo que respecta a las modificaciones concretas con atribución de valores ordinales a elementos que irrumpen en la paradoja de Littlewood-Ross– podrán plantearse también, *grosso modo*, respecto del resto de *súper-tareas* que trabajemos –analizarlas en

[28] Tymoczko y Henle (1995) no especifican este paso intermedio, pero es necesario incluirlo.

[29] Este es precisamente el sentido en que Benacerraf (1962) introdujo la distinción entre *super-tasks* y *super-duper-tasks*. Omitimos esta nomenclatura para desligarnos de las respuestas del propio Benacerraf y poder explicitar una panorámica más amplia además de por los problemas obvios de traducción.

estos términos una a una excedería claramente los propósitos del presente trabajo. Y es interesante concluir que podemos distinguir:

1. La *paradoja general* en varias formulaciones: a partir de la pregunta planteada sobre el resultado de la *súper-tarea* y, en concreto, en sus formulaciones derivadas de la pregunta por el *paso* ilegítimo entre la ejecución transfinita infinitesimalmente anterior al resultado –o *output*– de la *súper-tarea* y el estado final de la máquina con el propio *output* –en cada uno de los puntos anteriores. Esta paradoja es en la que nos centraremos a partir de ahora, no solamente por su interés histórico, sino por su papel nuclear a nivel lógico tanto en la definición de las *ATMs* como de los dos puntos siguientes.
2. Varias *hypo-paradojas*: como opciones concretas desde las que se plantean modificaciones experimentales concretas para recuperar resultados de tipo contradictorio volviendo a introducir en el debate *outputs* que, de otra forma, se habrían dado por superados –como que la urna se encuentre finalmente vacía–. Estas, no obstante, dependen en último término del caso *cero* de la paradoja inicial.
3. Una *meta-paradoja*: como la conjunción total de todas las respuestas ensayadas hasta ahora a partir de la cual se puede concluir un resultado, mínimo *contra-intuitivo* y, en su versión fuerte, explícitamente contradictorio.

Por último, y antes de pasar al estudio explícito de las ATMs como dispositivos capaces –o no– de ejecutar las *súper-tareas* que hemos estudiado hasta ahora, debemos hacer dos precisiones metodológicas. La primera, que es la más obvia, es la relativa a la selección de *súper-tareas* ¡aún no hemos hablado de la lámpara de Thomson[30]! Esto responde a varias razones y no se trata de un recorrido arbitrario por una *rapsodia* de ejemplos. La paradoja de Littlewood-Ross parece que es la mejor, tanto por su complejidad técnica, como por su formulación original –y sus múltiples versiones–, para explorar todas las posibles posiciones filosóficas que puede uno adoptar frente a estos problemas. Muchas súper-tareas tendrán que quedarse fuera por motivos obvios de limitación y, sin embargo, introduciremos problemas nuevos que no son considerados como *súper-tareas* en la literatura científica. Esto se ha hecho deliberadamente asumiendo que reviste más interés un estudio lógico que permita, tal vez, subsumir nuevos problemas bajo una definición generalizada de *súper-tarea* antes que una revisión bibliográfica exhaustiva que agote todo lo que se ha llamado *súper-tarea* a lo largo de la historia. Lo mismo sucederá, por tanto, con las ATMs en la próxima sección.

En segundo lugar, hemos utilizado en todo momento una lógica de primer orden y una teoría de conjuntos pero no nos hemos pronunciado al respecto. ¿Por qué no otra semántica? ¿U otra teoría de conjuntos? ¿O ambas? La respuesta es tan sencilla como decepcionante: por mor de la estandarización. En la dimensión puramente metodológica nos enfrentamos al *problema de identificación de Benacerraf*[31]. Este problema explicita la dificultad surgida al sorprendernos frente a numerosas alternativas formales para poder caracterizar nociones conjuntistas elementales que, sin ser semántica o lógicamente equivalentes, se presentan como alternativas igualmente válidas para construir las mismas teorías que aquí estamos empleando. Si el lector no se sintiera cómodo con la nomenclatura de ZF, podrá sustituirla por la de NBG y nada en lo tocante a las conclusiones alcanzadas en el presente artículo se verá afectado. Por lo demás, si el uso de las notaciones y axiomáticas más habituales facilita la lectura, no deja de ser una ventaja propedéutica relevante. El caso de la decisión de la lógica de predicados de primer orden es distinto: aquí prima su versatilidad, el equilibrio metalógico –teorema de Lindström, consistencia, etc.– y las ventajas que presenta en discusiones de tipo científico. Esto no debe tomarse como un compromiso monista: asumir que sea la mejor lógica para esta tarea no implica que lo haya de ser para *todas las demás* y trataremos de aludir a alternativas factibles siempre que sea posible. De hecho, ya hemos tenido la oportunidad de mencionar las posturas intuicionista y paraconsistente.

3. ATMs: temporalidad y efectividad

Aunque el sentido concreto de *súper-tarea*, que nos permitirá definir una ATM, lo hemos expuesto con la definición de Thomson (1954), lo cierto es que existen aproximaciones anteriores, entre las que destacan Blake (1926) y Russell (1915) por un lado y los desarrollos independientes de Weyl (1949)

[30] Especialmente grave si recordamos que fue la primera en definirse y a nivel lógico puede que sea la más simple.
[31] Benacerraf (1965).

por otro[32]. Todos ellos propusieron la posibilidad de concebir una máquina de Turing que completase una secuencia infinita de decisiones en un intervalo finito de tiempo devolviendo, por ejemplo, el primer resultado en $\frac{1}{2}$ *min.,* el segundo en $\frac{1}{4}$ *min.*, el tercero en $\frac{1}{8}$ *min.,* etc. es decir, una máquina acelerada en esta caracterización más general –bajo la que pueden subsumirse las propuestas de Thomson y de Littlewood-Ross – es, precisamente, aquella capaz de ejecutar cada acción en 2^{-n} unidades de tiempo para el n-ésimo paso.

Turing (1936) formuló un modelo de máquina computacional que, tal y como puede deducirse por el nombre de las ATMs, está a la base de dichos dispositivos computacionales: con la salvedad de tener *aceleración* en la ejecución de cada tarea. En este sentido, y a partir de la idea extendida de proceso T-computable, podemos entender por proceso computacional toda «secuencia de estados y la configuración de la máquina –es decir, la condición de la máquina, posición del escáner y contenido de la cinta– en cada estado α + 1» como «completamente determinado por la configuración de la máquina en el estado previo α»: Turing (1936), Shagrir (2004, p. 106).

Tal y como señala Copeland (2002), ni Turing (1936) ni Post (1936), como pioneros en la definición de los formalismos a la base de los dispositivos capaces de ejecutar dichos procesos computacionales elementales, prestaron especial atención, ni en la definición de *máquina* o programa, ni en la de *proceso computacional*, a la noción de *temporalidad* tan estrechamente conectada a la de *secuencialidad* presente en todo proceso computacional –entendido en los términos anteriores–.

Turing (1950, p. 1) definió, en concreto, un procedimiento efectivo como «cualquier proceso definido por reglas que podría haber sido realizado por un operador humano trabajando de manera disciplinada pero no inteligente». Esta caracterización es sencilla y de ahí deriva probablemente su éxito, pero incorpora una serie de términos ambiguos como *regla*, *operador humano*, *trabajo*, *disciplina* o, especialmente, *inteligencia*. Lo que a nosotros nos interesa, por el momento, es la noción de *proceso*.

Copeland (2002, pp. 281-282) apunta que, habitualmente, se entiende por «procedimiento efectivo» aquel en que la «ejecución de instrucciones debería demandar un número finito», o atómico o elemental, de «pasos» computacionales concatenados. La idea de aplicación secuencial de reglas permite, para Copeland (2002, pp. 281-282), una aproximación alternativa en términos puramente temporales, tal vez, incluso, menos problemática, al menos, a nivel formal: la ejecución completa de las instrucciones o reglas habrá de exigir solamente una *cantidad de tiempo finita*[33].

Podemos abordar la idea de *efectividad*, por tanto, en términos de *reconstrucción de pasos* de computación[34] o, preferiblemente, en términos de *finitud* temporal o de secuenciación. Hofstader (1980, pp. 40-41) ya se había dado cuenta de esta misma idea y sostuvo que, a menudo, ambas caracterizaciones de *efectividad* en el proceso computacional son tratadas como equivalentes pero, prestando atención, se observa que «no lo son». Copeland (2002, p. 282) propuso, incluso, referirnos a los procedimientos caracterizados en base a la satisfacción de una cantidad total de tiempo finita como *Efectivos* con *E* mayúscula para evitar equívocos. En palabras del propio Copeland (2002, p. 282), «ni Turing ni Post, en sus respectivas descripciones de los dispositivos que ahora llamamos máquinas de Turing hacen mucha mención al tiempo». Solo listan operaciones primitivas –procesos fundamentales– que realizan sus dispositivos, pero «no dicen nada acerca de la *duración* de cada operación primitiva». Y Shagrir (2004, p. 106) concluye, al respecto que:

> La asunción implícita en la literatura sobre computación es que existe un límite inferior en la duración de una operación primitiva. En concreto, se asume que un proceso que consista en una sucesión infinita de estados –en los casos en que la máquina no se detiene– requiere de un tiempo infinito.

---

[32] Esto históricamente desliga la definición de ATM como dispositivo capaz de ejecutar una *súper-tarea* si recordamos que estas últimas son posteriores. En sentido estricto sí, pero recordemos también que se ha mencionado que las propias paradojas de Zenón podían leerse como *súper-tareas*. Además, merece la pena insistir una vez más en el mayor interés para un estudio como este que reviste un análisis lógico antes que histórico: sacrificamos en las definiciones generales el rigor doxográfico asumiendo que un anacronismo merece la pena que implica si esta no logra opacar los resultados que permite obtener.

[33] Debemos matizar que ni las propuestas de *singularidad* de IA en sentido fuerte ni los procesos *emergentistas* basados en modelos de tipo de redes neuronales entran aquí en juego. Ambos casos cumplen secuencialidades finitas y, en cualquier caso, cantidades de tiempo finitas: cfr. Benítez (2022).

[34] Algo que sí permitiría conectar los debates relativos a la nota a pie de pág. 28.

Por lo que esta asunción, frecuentemente implícita, dejará de ser problemática cuando nos enfrentemos a procesos efectivos resueltos bajo la computación acelerada en el sentido ya mencionado de las *súper-tareas*. O, dicho de otra manera, explicitar y cuestionar la limitación temporal *inferior* dentro de la efectividad de un proceso fue la pregunta que dio lugar a la posibilidad de concebir una ATM *stricto sensu*.

Toda máquina que, de manera computacionalmente efectiva, se comprometa con la asunción de dicho límite podrá ser caracterizada en términos Turing-computables. Una ATM será exactamente igual a toda máquina de Turing salvo en una diferencia crucial. En palabras de Copeland (2002, p. 283): «imponer el mismo patrón [de incremento de 1/2] sobre una máquina de Turing produce lo que yo he llamado máquina de Turing acelerada». Copeland (1998 b, c) definió estos dispositivos como aquellas máquinas de Turing capaces de realizar la segunda operación primitiva ordenada por el programa rector en la mitad de tiempo que llevó la ejecución de la primera, la tercera en la mitad de tiempo que llevó realizar la segunda, etc. En concreto, la secuenciación utilizada por Copeland (2002, p. 283), una de las más habituales hoy en día en la caracterización de una ATM, fue la siguiente:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\cdots<1$$

Copeland (2002, p. 283) consideró que «una ATM –o computadora humana– puede realizar infinitas operaciones primitivas antes de que hayan transcurrido dos instantes de operación». Esto se puede trasladar a la escala de segundos de Russell, Weyl o Thomson, por la que en el intervalo [0s, 1s] se lograrían ejecutar *efectivamente* –esto es lo relevante– infinitas operaciones en un intervalo finito. Y aquí ya queda explicitada la relación con las *súper-tareas* como concatenación de tareas simples T-computables.

Una ATM, a partir de la caracterización tan genérica que acabamos de ofrecer, puede concretarse en diferentes diseños. En este sentido, Stewart (1991, p. 664) relacionó directamente las ATMs con las máquinas *anti de Sitter* de Copeland y Sylvan (1999) posteriormente desarrolladas por Hogarth (1992, 1994) y que, más tarde, Earman y Norton (1993, 1996) terminaron de demostrar como un tipo de ATM. Bajo la caracterización de las ATMs se pueden subsumir, además, las máquinas de *ensayo-y-error*[35] o las conocidas *máquinas de Zeus*[36] –dispositivos computacionales capaces de realizar un tipo concreto de *súper-tareas* en términos de ganancia computacional por *aceleración* en cada uno de los pasos de ejecución–. Pero la inversa no es cierta. Ya que, tal y como señala también el propio Stewart (1991, p. 665), existen máquinas de Zeus que no son T-computables –el ejemplo más famoso son los llamados *oráculos* o *máquinas-O*–. Debido a esto último, es fácil ver por qué nos centraremos únicamente en el estudio de las ATMs *stricto sensu*.

La característica que revela la «T» en las siglas «ATM» ha marcado claramente el rumbo de su definición y la discusión en torno a su posibilidad, al considerarse que el carácter de su *efectividad* sumado a la Turing-computabilidad estipularían las únicas condiciones necesarias –aunque no suficientes– para su implementación física o, mejor dicho, para la implementación física de cierto tipo de dispositivos que se basen en su esquema formal –o, al menos, la posibilidad de tal implementación. Stewart (1991) y Hamkins y Lewis (2000) han desarrollado los mejores tratamientos matemáticos de las ATMs. Más adelante mencionaremos algunos de estos límites, aunque su estudio detallado constituirá el estudio de la pregunta por la *posibilidad física*.

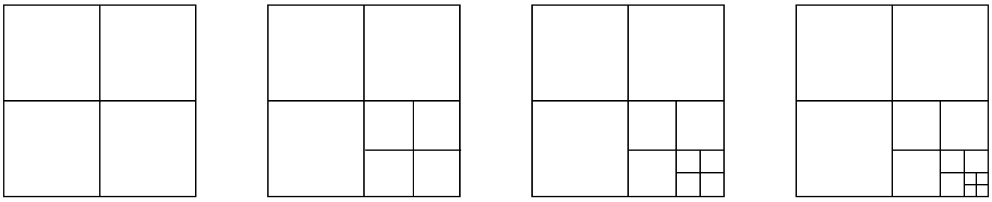
Tal y como comentamos al principio, las *súper-tareas* fueron definidas por primera ver por Thomson (1954), pero la posibilidad de un dispositivo como una ATM se remonta a hace casi cien años. Russell (1915) y Weyl (1927) fueron, probablemente, los primeros en pensar tales dispositivos y estudiarlos desde una dimensión filosófica en relación con las paradojas de Zenón –base de las máquinas de Zenón y *proto-súper-tareas* en cierto sentido–. De hecho, Weyl (1927, p. 34) consideró explícitamente una máquina capaz de completar «una secuencia infinita de distintos actos de decisión en un tiempo finito». Esto se corresponde con una caracterización general e informal de ATM. *General* porque no alude a la efectividad ni T-computabilidad del dispositivo e *informal* por cuanto no asume una definición lógica exhaustiva, de *súper-tarea.*

[35] Putnam (1965) y Gold (1965).
[36] Boolos y Jeffrey (1980, pp. 14-15).

Ahora, especialmente tras los últimos resultados en lo que respecta al estudio, no solamente de ATMs, sino también de *súper-tareas*, estamos en disposición de poder unificar todos los resultados para alumbrar algo de luz a la polémica pregunta acerca de su existencia. Con las definiciones anteriores podemos definir una ATM o una *súper-tarea* de manera inequívoca basándonos en un cálculo de predicados de primer orden, algo de teoría de conjuntos y ciertas operaciones aritméticas elementales. Pero, antes de pasar a clarificar el sentido que pueda tener, en este contexto, la pregunta acerca de la existencia de las ATMs, veamos con algo más de detalle algunos ejemplos relevantes.

La caracterización exhaustiva o lógicamente formal nos permite, sobre todo, tomando como modelo la propuesta de Steinhart (2007), generalizar un proceso de formalización de distintas *súper-tareas*. Steinhart (2007) propone dibujar el conocido como *mapa de Royce* –ver Figura 2– que representaría el proceso de dibujar un mapa infinitamente recursivo. En base a este modelo, se pueden relacionar otros casos simples de *súper-tareas* tomadas en expansiones geométricas planas: la lámpara de Thomson, la jarra de Littlewood-Ross o los mapas de Royce son solo algunos de los más paradigmáticos. Mediante la inclusión de una definición de aceleración en la línea de Weyl (1963, p. 42), Grünbaum (1968), Boolos y Jeffrey (1989, pp. 14-16) podemos ilustrar el siguiente ejemplo:

Figura 2 Cuatro primeras iteraciones de un mapa de Royce auto-anidado. Con una regla inicial M_0, como la definición del cuadrado o folio de mapa con una cruz sobre él interpretada como formalización de Inglarerra, podemos introducir una regla de sucesión de generación de mapa, M_{n+1} en que tomamos el mapa anterior M_n con una cruz nueva sobre el cuadrante inferior derecho. Nuestra ATM podría dibujar este en la mitad de tiempo que el anterior, algo coherente con su peso. Así se dibuja un «folio de Hilbert M_{n+1} en un tiempo de Zenón Z_{n+1}. La regla límite será el límite del mapa M_ω como resultado en el momento límite de Zenón $Z_\omega = 1$. Puesto que todo cuadrante inferior derecho generado en la secuencia de la imagen es isomorfo al cuadrado total, podemos decir que estamos ante una estructura infinitaria en términos de Dedekind.



Fuente: esquema de elaboración propia.

Royce (1899, pp. 506-507) planteó el problema acerca de cómo dibujar un mapa perfectamente adecuado de Inglaterra sobre la superficie de la propia Inglaterra. Como el mapa ha de describir perfectamente la parte de Inglaterra en la que él mismo es dibujado, este tendría que contener, entonces, una copia exacta de sí mismo –que contendría una copia de sí mismo, que contendría…– de manera infinitamente recursiva. Si, atendiendo a la Figura 2, tomamos cada división en el cuadrante inferior izquierdo de una hoja e imponemos que se realice en la mitad de tiempo que el anterior, ya hemos formalizado una *súper-tarea* en el intervalo [0, 1] cuyo resultado sería precisamente la realización completa del dibujo.

De hecho, al estilo de la Figura 2, uno puede dibujar el conocido como *folio de Hilbert*: un papel cuadrado en que cada natural se inscriba como base uno a partir de una serie de trazos secuenciales y completar la lista completa como presunto resultado de una *súper-tarea* ejecutada por una ATM. Obviamente, de admitir la posibilidad de esta ejecución, las consecuencias serían mucho más que relevantes: se podrían investigar todos los patrones sobre números primos, las conjeturas de Goldbach, los teoremas de Fermat, generar cálculos sobre dígitos de π –las ATM diseñadas a este efecto, habitualmente han sido conocidas como π-máquinas y, aunque se han estudiado desde máquinas oráculo, que hemos mencionado que no serían propiamente ATMs, ahora se podrían interconectar los debates directamente–, etc.

A partir de esta aproximación formal podemos, además, relacionar directamente las *súper-tareas* –ejecutadas– y las ATMs con dos campos enormemente fructíferos en las áreas de la lógica formal y la filosofía de las matemáticas: la teoría fractal y la mereología. Esto último queda pendiente para un futuro trabajo. En cualquier caso, ya podemos preguntarnos si tales máquinas son posibles o, siendo más correctos, si *existen*. Pero ¿qué queremos decir cuando preguntamos si una ATM *existe*?

4. ¿Qué preguntamos cuando preguntamos si una ATM *existe*?

La pregunta acerca de la existencia de un objeto o formalismo iría, a todas luces, mucho más allá de los límites del presente trabajo. Sin embargo, debemos precisar una serie de asunciones relevantes y hasta ahora, ausentes en la bibliografía relativa a la discusión sobre la posibilidad de las ATMs:

1. Al trabajar desde una perspectiva formal y poder caracterizar en un formalismo lógico adecuado tanto las *súper-tareas* como las mismas ATMs trabajaremos con la noción de *existencia* al modo habitual en lógica de predicados de primer orden: vía cuantificador existencial estándar.
2. No admitiremos, como pueden proponer Rayo y Williamson (2003), una cuantificación irrestricta, aunque sí asumiremos la homogeneidad del cuantificador existencial.
3. Como consecuencia inmediata de los dos puntos anteriores tomaremos la *existencia* como un predicado de segundo orden con las restricciones habituales[37]: no predicaremos existencia de objetos ni, por tanto, asumiremos *categorías*[38] metafísicas en el sentido tradicional del término.

A partir de aquí la estrategia que adoptaremos será la de preguntarnos si una *súper-tarea* es definible formalmente sin generar paradojas: de manera consistente. En caso negativo, por definición, no podrá existir una ATM ya que es condición necesaria –aunque no suficiente[39]– que pueda ejecutar una *súper-tarea*. Ahora bien, en caso afirmativo, los límites a dicha posible resolución serán, en último término, los límites a toda posible implementación de una ATM.

Como ya hemos mencionado, el primero en introducir esta discusión, en concreto, en términos puramente filosóficos, fue el propio Russell (1915) en una conferencia en Boston de 1914 mientras discutía una serie de puntos acerca de las paradojas de Zenón. Aunque fue en su posterior discusión con Alice Ambrose en la que Russell (1936) escribió: «Miss Ambrose afirma que es imposible [para un hombre] recorrer la expansión completa de π. Yo diría que es *médicamente* imposible. La opinión de que la frase "tras un número infinito de operaciones" es auto-contradictoria parece poco correcta». Esta es, precisamente, la clave de la cuestión en torno a la discusión de la existencia: la caracterización de su *posible definición*.

Si la tratamos, como hemos mencionado, en términos estandarizados de instanciación cuantificacional, cuando ahora nos preguntemos acerca de *la posibilidad de existencia*, no estaremos haciendo otra cosa más que introducir un marco semántico modal estándar[40]. Y esto es enormemente importante, porque de entre todas las posibles interpretaciones que se pueden y suelen dar a los operadores modales nos interesa centrarnos exclusivamente en dos –por lo demás las más habituales– manteniéndolas bien diferenciadas:

1. Posibilidad y necesidad *aléticas*: preguntando si existen las ATMs evaluando su *posibilidad lógica* en dominios cuyos objetos sean abstractos. En las que centramos el presente artículo y que permiten equiparar posibilidad con existencia: algo bloqueado en la siguiente interpretación.[41]
2. Posibilidad y necesidad *físicas*: preguntando si existen las ATMs evaluando su *posibilidad física* en dominios cuyos objetos sean *ítems* con predicados espacio-temporales. Aquí se deberá discutir, en un futuro, el debate en torno a su posible *implementación* computacional. Una respuesta positiva permitiría admitir que son posibles *de re*.

La diferenciación de dominios bajo la interpretación de los distintos operadores podrá llevarse a cabo sin admitir cuantificación irrestricta. Lo importante es que, de admitir que exista al menos una *súper-tarea definible* sin generar paradojas –o un dispositivo capaz de ejecutarla– a nivel *puramente formal*, es decir, en cuanto que *objeto abstracto*, podremos admitir su existencia en cuanto que tal: ya que sí presuponemos la *universalidad* de verdades lógicas y matemáticas elementales en cuanto que relativas a objetos abstractos –y lo que suelen considerarse en dominios modales *tautologías* o *verdades lógicas trascendentales*, es decir, necesarias en ciertas condiciones–. Dicho esto, el problema que tendríamos si no separásemos ambas interpretaciones o lecturas de los operadores modales de posibilidad y necesidad sería que, del hecho de concluir que un objeto sea *matemáticamente posible*, no podremos

---

[37] Frápolli (2014, 2023).

[38] En el sentido clásico como *predicados* únicamente cualitativos en el sentido aristotélico.

[39] Recordemos, entre otros, los criterios de efectividad computacional y T-computabilidad de la sección anterior.

[40] Para los propósitos del presente trabajo basta con tomar los operadores modales interpretados en cálculos de *tipo normal*: cfr. Priest (2012).

[41] En sentido técnico podemos decir que, si admitimos que existe al menos una vía de caracterización consistente para las ATMs, entonces se puede afirmar su modalidad *de dicto* –asumiendo una relación de accesibilidad reflexiva, esto es importante– pero también *de re*.

concluir nada acerca de su instanciación en cuanto que *físicamente existente*. Aquí, por el contrario, se asimilará la máxima no construccionista por la que «si algo es lógicamente posible, existe como objeto abstracto», entendiendo que de aquí no seguirá, ni mucho menos, que «y en tal caso se podrá construir o diseñar un dispositivo que simule su comportamiento operacional a nivel mecánico espacio-temporal».

De hecho, al asumir, de fondo, metodológicamente, una semántica modal estándar de primer orden, podríamos llegar a unificar toda la discusión en una *many-sorted logic* en la que incluyésemos subíndices para definir operadores modales y cuantificadores estándar al modo habitual[42]. Si respetamos la separación de tratamiento con una semántica de primer orden y otra modal es simplemente por mor de la simplicidad y la familiaridad presupuesta al lector con estos dos cálculos. Quedan pendientes, pues, (i) el estudio explícito de 2 y (ii) un estudio unificado en una lógica de orden superior multivariada en que caracterizar inequívocamente las *súper-tareas* y las ATMs.

Blake (1926, pp. 650-651) fue, probablemente, uno de los primeros en plantear el análisis de las ATMs en términos de evaluación de su posibilidad, aunque no lo desarrolló formalmente. A este respecto señaló, a propósito de la *posibilidad* de completar una serie infinita de acciones en un tiempo finito, que «un proceso [así] es perfectamente concebible, por ejemplo, tal que en cada paso durante el proceso la adición del siguiente se incrementa en la serie ½, ¼, 1/8, etc.» el proceso terminaría en un segundo si cada paso se mide así en segundos.

El debate en torno a la existencia de las propias ATMs siempre ha estado de fondo, pero rara vez se ha explicitado. Steinhart (2007, p.5), por ejemplo, lo hizo precisamente para matizar que se dejaría de lado: «discutimos sobre una variedad de máquinas infinitamente potentes y sus operaciones infinitamente complejas. No investigaremos la existencia de dichas máquinas» y eso que llegó a plantear su relación con ciertas discusiones *teístas* al admitir la posibilidad de considerar a Dios como una «mente infinita». Este será, precisamente, uno de los puntos de mayor interés a la hora de evaluar la existencia de las ATMs: el impacto de los resultados en discusiones metafísicas en un sentido tradicional del término.

Leblac (1993) y Achtner (2005) desarrollaron discusiones de carácter histórico pero, al igual que Steinhart, rechazaron «apelar a viejos argumentos sobre la existencia de Dios» admitiendo también las dificultades a la hora de «conectar la teoría cantoriana moderna acerca del infinito con el teísmo tradicional». Algo que, si bien es cierto que no se plantea de manera inmediata, tiene conexiones más o menos sencillas de establecer, no respecto de una figura divina teológica concreta, sino con el debate en torno a lo que la tradición ha convenido en llamar *el Dios de los filósofos*. Desde el debate en torno a la posible asunción de infinitos en acto y la pregunta acerca de la *posible existencia física* de las ATMs, uno puede, con relativa sencillez, conectar las conclusiones lógicas con debates metafísicos clásicos.

Es decir, aunque nosotros aquí asumamos una metafísica *analítica*, eso no impide, de entrada, comprometernos con una superación absoluta de todos y cada uno de los debates clásicos. Y, en este caso particular que nos atañe, las respuestas –positivas o negativas, claro– que se alcancen respecto de la posible *existencia* física de dispositivos capaces de ejecutar *súper-tareas* sí que parece que tendrán una clara relación con debates teístas. Igual que Doyle (1991), podemos afirmar que nuestro objetivo, aunque no el «único» es también el de «cartografiar el espacio lógico de todas las posibles máquinas y mentes» en un sentido acelerado: no a nivel histórico, como ya hemos concretado, sino lógico-formal. En este mapa es *donde* podremos preguntarnos por las conexiones con cuestiones metafísicas[43].

5. Posibilidad lógica computacional

Una máquina de Turing puede ser programada para calcular dígitos de π, por lo que una ATM podría ser diseñada para ejecutar el mismo cálculo. Si bien muchas de estas máquinas que calculan los dígitos de π, llamadas π-máquinas, no son ATMs. Esto se debe a que una ATM puede ejecutar «cada acto de escribir lo que ordene su programa antes de que hayan pasado dos momentos de ejecución», es decir, que «para todo *n*, la ATM escribe el *n*-ésimo dígito de representación decimal de π entre dos momentos de operación» (Copeland (2002, p.284)). Por tanto, una ATM podría determinar si, por ejemplo, existen o no tres 7s consecutivos en la expansión decimal de π. Pero, como recorrer esta expansión completa de

---

42 Manzano y Aranda (2022).

43 En concreto, cuando uno se aventure a investigar las posibilidades físicas podrá relacionar el presente debate directamente con la polémica Lucas-Penrose en torno a los argumentos gödelianos: Gherab (2023).

decimales es *imposible*[44] y se seguiría de lo anterior, tendríamos que rechazar, por *reductio ad contradictio*, la posibilidad de una ATM[45]. Puesto que, además, dicha imposibilidad de recorrido sobre los dígitos de π es una imposibilidad lógica: deberíamos concluir que una ATM es *lógicamente imposible*.

De hecho, lo interesante es que, si una π-máquina fuera lógicamente posible, también lo serían las conocidas como *máquinas de paridad* –aquellas que señalan si un número cualquiera es par o impar– aplicadas al resultado de la π-máquina, por lo que podríamos preguntarnos de manera *lógicamente* legítima ¿qué valor devolverá la máquina de paridad respecto de los dígitos de la expansión de π? No obstante, el razonamiento inverso no es válido: sólo el contrapuesto. En esta línea es en la que Copeland (2002) nos avisa de que del hecho de que un dispositivo compuesto de dos máquinas diferentes no pueda resolver su función propia –aquí la paridad del último dígito de representación de π– no se sigue que los sub-dispositivos que lo componen, en sí mismos, no puedan cumplir *sus* propias funciones. Y esto conecta el debate, directamente con el *problema de parada*.

De dos dispositivos computacionales lógicamente posibles se puede seguir que su conjunción no sea lógicamente posible. Esto es algo que afectará a todas las soluciones relativas a la implementación de una ATM capaz de resolver el problema de parada desde una perspectiva lógica, por lo que urge investigar la posibilidad lógica del dispositivo individuado para, si acaso, en segundo lugar, ensayar su conjunción con otro u otros. Si pensamos, por ejemplo, en un dispositivo que se encargue de mantener el voltaje a lo largo de un cable AB constante y *alto* y de otro dispositivo que se encargue de mantenerlo, también sobre AB, constante y *bajo*: ambos son lógica y físicamente posibles y, sin embargo, su conjunción no lo es ni siquiera lógicamente –respetando el funcionamiento de cada uno[46]–. Puede que el caso de la conjunción «*calcular-paridad* ∧ *calcular-dígitos-de* π» sea del mismo tipo. Por lo que, debemos concluir, con Copeland, que no existe una relación de implicación fuerte o causalidad entre la imposibilidad de una máquina compuesta y la imposibilidad de su componente π-máquina.

Para Ambrose (1935), la expresión «recorrer la expansión completa de π» es una oración auto-contradictoria. Es decir, que su propia afirmación implica como consecuencia lógica dos enunciados que generan una contradicción sin necesidad de añadir nada más. Y, si bien esta postura es rastreable aún hoy en día, durante los años 50 y 60 se empezó a debatir sobre π-máquinas admitiendo, al menos de entrada, la posibilidad lógica de dicho cálculo: Black (1951), Taylor (1951), Watling (1952), Hinton y Martin (1954), Thomson (1954), Benacerraf (1962), Chihara (1965) o Gründbaum (1968) son sólo algunos de los ejemplos más paradigmáticos de esta discusión. La idea clave era esta: no está claro que el recorrido de la expansión completa de π sea algo que, en sí mismo, y sin necesidad de añadir ninguna premisa más, sea susceptible de ser calificado como *contradictorio*. Y así fue como se empezaron a ensayar las primeras *súper-tareas*: para poder deducir contradicciones explícitas y reafirmar la postura de Ambrose, o bien para argumentar que tales contradicciones no eran legítimas. El debate paso de asumir, de entrada, un enunciado como auto-contradictorio a explorar la legitimidad y los límites de las contradicciones que podrían derivarse de él. Así llegamos a la *lámpara de Thomson* que ya hemos mencionado. Primer argumento explícito para argumentar que las ATMs –en general– no son, de entrada, *lógicamente posibles* y, sin duda, una de las *súper-tareas* más populares.

Veamos la versión original de Thomson (1954, p.5):

> Hay algunas lámparas que tienen un interruptor en la base. Si la lámpara está apagada y presionas el botón, la lámpara se enciende y, si la lámpara está encendida y presionas el botón, la lámpara se apaga. Por tanto, si la lámpara estaba originalmente apagada y presionas el botón un número impar de veces, la lámpara se enciende y si presionas el botón un número par de veces, la lámpara se apaga. Supongamos ahora que la lámpara está apagada y yo tengo éxito presionando el botón un número infinito de veces, quizá pulsando el interruptor una vez en un minuto, otra vez en el siguiente medio minuto, y así sucesivamente de acuerdo con la fórmula de Russell. Tras haber completado la secuencia infinita de presiones al interruptor completa, es decir, al final de dos

[44] Ambrose (1935, p. 320).

[45] Podría negarse también, es verdad, la posibilidad de ejecución de esta *súper-tarea* por parte de la ATM. Pero entonces tendríamos que eliminar la "A" de sus siglas y esto equivaldría a reducir las ATMs a máquinas de Turing, es decir, negar su existencia. Por tanto seguiríamos negando la posibilidad de una ATM.
lo que pondría en cuestión la "A" de las siglas "ATM".

[46] Se sobreentiende que la conjunción no es *posible* si pierde la *efectividad* de la sección anterior.

> minutos, ¿Está la lámpara apagada? Parece imposible responder a esta pregunta. No puede estar encendida porque yo nunca la he encendido sin tener que apagarla inmediatamente. No puede estar apagada, porque debí encenderla en primer lugar y, a partir de ahí, nunca he podido apagarla sin encenderla de nuevo. Pero la lámpara debe estar, o bien encendida, o bien apagada. Esto es una contradicción.

Aquí, las respuestas posibles son análogas a las que veíamos con la paradoja Littlewood-Ross aunque menores en número ya que no podremos generar las modificaciones experimentales que hacíamos con las bolas al tener solamente dos estados. Por tanto, podríamos argumentar, de nuevo, que: la pregunta no es pertinente; ofrecer una solución escéptica planteando que se halla finalmente encendida o apagada o, por último, ofrecer una solución directa y atacar alguna de las premisas implícitas o explícitas en el planteamiento.

Es interesante destacar que el problema principal es, de nuevo, el salto entre la ejecución del proceso y el resultado final o *output* devuelto por la ATM que lo ejecutase. Veremos también que, en la línea de una solución directa, además, habrá varios puntos por los que atacar la formulación original de Thomson. En esta línea, Benacerraf (1962, pp. 767-770) argumenta que los enunciados «la lámpara está encendida transcurridos dos minutos» y «la lámpara está apagada transcurridos dos minutos» son ambos lógicamente consistentes con la constatación de que la *súper-tarea* se haya realizado satisfactoriamente –crítica que ya adelantó Blake (1926, pp. 651-652)–.

Este problema es interesante porque incide en la imposibilidad de generar una paradoja desde la pregunta de Thomson. Si llamamos *instrucción-Thomson* al siguiente comando «pulse el botón para que la lámpara realice un ciclo entre sus dos estados impidiendo que un estado no sea seguido nunca por otro y de forma que el primer medio-ciclo tome un minuto, el siguiente, la mitad que el anterior y así sucesivamente», puesto que cada cambio de estado provocado por el seguimiento de la regla debe suceder antes del final del segundo minuto, no se puede concluir lógicamente nada relativo al estado de la lámpara al final del segundo minuto del mero hecho de haber cumplido la instrucción. De hecho, esta idea que refleja el problema de diferenciación entre *la-ejecución-del-proceso* y el *output* llegó a hacer cambiar de opinión al propio Thomson, quien terminó afirmando: «ahora estoy inclinado a pensar que no existen argumentos de derribo simples que muestren que la noción de *súper-tarea* completa sea auto-contradictoria» (1970, pp. 130-131). La clave está en este *salto* al igual que sucedía con la paradoja Littlewood-Ross. Chihara lo resume de la siguiente forma:

> La dificultad, como yo la veo, es […] la inconcebilidad acerca de cómo la máquina puede realmente finalizar su súper-tarea. La máquina podría supuestamente imprimir los dígitos en la cinta, uno tras otro, mientras la cinta fluye a través de la máquina, digamos, de derecha a izquierda. Por tanto, en cada paso de la operación, la secuencia de dígitos se extendería a la izquierda con el último dígito impreso en "el centro". Ahora, cuando la máquina complete su tarea y se apague deberíamos ser capaces de mirar la cinta para ver qué dígito ha sido impreso el último. Pero, si la máquina termina imprimiendo todos los dígitos que constituyan la expansión decimal de π, ningún dígito podrá ser el último dígito impreso ¿Y cómo entendemos esta situación? (1965, p. 80)

Pero, para Copeland (2002, p. 287), esta respuesta aún seguiría siendo «simplemente inconsistente» ya que se exigiría la impresión de *un último decimal*, lo cual implica definir un dispositivo imposible. Ahora bien, aquí hay que distinguir dos nociones de *imposibilidad* distintas: en la respuesta de Chihara estamos, claramente, ante una imposibilidad *física*, mientras que Copeland está sentenciando la *imposibilidad lógica* de caracterizar tal dispositivo por las propias definiciones de π y *expansión decimal* en sí mismas.

De hecho, Copeland propone una alternativa interesante que no hemos evaluado hasta ahora y que va más allá del problema relativo al salto que supone pasar de la ejecución del proceso al resultado final: rechaza que una π-máquina sea tipo Turing. Admitir esto, implicará eliminar la *T* en las *ATMs* y, por tanto, constreñir mucho la posibilidad lógica de tales dispositivos. ¿Es, el último término, una máquina capaz de resolver una *súper-tarea* una máquina de Turing o esto es incompatible con su característica de ser *acelerada*?

Pues bien, según este argumento, toda máquina de Turing ha de *detenerse* siguiendo una orden *stop* o de parada y siempre es posible reconstruir –deterministamente– las órdenes ejecutadas en orden inverso a su proceso de ejecución. Puesto que no es *lógicamente posible* que haya un último dígito de π impreso por definición, entonces o bien la máquina nunca imprime dicho último dígito de π, o bien realiza otra *súper-tarea* como imprimir infinitos ceros entre el dígito de π y la detención. En el primer caso, suponiendo que sí sea una máquina de Turing, no se ejecuta la *súper-tarea* y, por lo tanto, no puede devolver un *output*. En el caso restante, tendríamos que volvería a suceder lo mismo con la segunda *súper-tarea*: recursión *ad infinitum*. Por tanto, por reducción a la contradicción, escribir la expansión decimal completa de π y detenerse; o bien escribir los dígitos de π, luego los de *e* y, finalmente, detenerse, parecen ser acciones que ninguna máquina tipo Turing podría realizar.

¿E incluyendo una máquina que sí sea tipo Turing en una estructura computacional *superior*? Podríamos pensar en un programa encargado de imprimir dígitos de π sin instrucción de parada. Chihara propone una *supra*-máquina que incorpore, por ejemplo, un reloj y la instrucción de que se desconecte a sí misma de la fuente de energía al final del intervalo del proceso.

La objeción a este problema sería que una cinta de una máquina de Turing o de Post (1936) no puede albergar esta información al trabajar series de enteros. Pero la máquina no tiene por qué escribir sucesivamente en celdas cada vez distintas: puede diseñarse para que imprima, borre y reimprima constantemente en la misma celda. Esta operación no tendría un *último elemento* ¿y qué significa esto? ¿qué se escribiría al final de la ejecución del programa? Copeland (2002, p. 288) concluye que «la lección del argumento de Benacerraf es que la especificación de la máquina hasta ahora no implica una respuesta a esta pregunta. Para que exista una respuesta, el pliego de condiciones debe extenderse». Pero esta respuesta, al menos, parece desbloquear tenuemente la imposibilidad lógica derivada de la negación de T-computabilidad para la ATM.

No se trataría de que en el último instante –si bien aquí «último» es una metáfora– se borraría: durante el proceso mismo de impresión el resultado se deshace tan pronto como la impresión finalizaría: convirtiendo en obsoleta la tarea de borrado. A partir de la especificación de esta orden, la casilla, al final, estaría inevitablemente en blanco. Es decir, que la única manera que tenemos de asegurar la ejecución exitosa sería incluyendo *ad hoc* un requisito para que *no sea posible* informar del resultado ¿depende entonces la posibilidad lógica del dispositivo de un estado epistemológico? Pareciera que se está afirmando que, solamente si no sabemos cómo se realiza la tarea, podría entonces ejecutarla: eliminando todos sus pasos y sin posibilidad de acceder al resultado final. Y entonces, debemos plantearnos si es legítima la pregunta de Copeland acerca de «¿qué habría quedado escrito en la última casilla de no haberse eliminado la información?». Para Copeland (2002, p. 289), «se pueden ofrecer respuestas lógicamente consistentes a las preguntas de Thomson acerca de la condición de una detención de una π-máquina después de que se haya detenido», aunque sean «decepcionantes». Pero, si estipulamos como una condición para la ejecución *sine qua non* nuestro desconocimiento respecto del resultado, entonces habremos dado un paso ilegítimo en la identificación entre la lógica y la epistemología. Paso que, si bien sí puede ser pertinente, habrá que justificarlo filosóficamente.

Si el hecho de que una ATM sea una máquina de Turing depende exclusivamente de nuestra ignorancia del resultado, parece que nos encontramos más bien frente a un argumento a favor de tomar las ATMs en su caracterización original como dispositivos Turing computables que de negarles dicha característica. Puede que una solución simple pase por entender que Copeland está ligando, desde el primer momento, la caracterización de poder ejecutar tareas *T-computables* al estado epistemológico de un observador externo, algo que no parece necesario realizar. Un *oráculo*, por ejemplo, si bien ejecuta tareas que no son T-computables devolvería a ese hipotético usuario, tras el final del segundo instante, una cinta infinitamente larga en la que aparecería cada dígito de π. ¿Debemos entonces unir bicondicionalmente la *T-computabilidad* y nuestro estado de conocimiento? Parece que la respuesta más certera, al menos desde un análisis lógico –en que se asuma que la lógica es distinta de la psicología y la epistemología–, habrá de ser negativa[47].

[47] Y esto es de sumo interés para el debate en torno a las interpretaciones filosóficas del problema de parada –y, por extensión de cualquier meta-teorema de incompletitud–. Cfr. Burgin (1992, 2001). La pregunta más esquiva en estas discusiones es la que reza ¿qué limita exactamente un meta-teorema limitativo? Si rechazamos la tesis de Copeland habremos avanzado con un paso, arriesgado pero interesante, alejándonos de la concepción por la que se trata de límites del sujeto cognoscente –aún en su versión *trascendental*, por emplear la terminología kantiana–. Y entonces parecen resurgir viejos fantasmas a favor de posturas platónicas ya que, como bien planteó Gödel, ¿puede algo que hayamos creado nosotros mismos devolvernos limitaciones tan complicadas de comprender?

Así, el problema que genera esta última *paradoja de Copeland* parece que permite una solución directa. De hecho, esta solución nos enfrenta ya a la necesidad de tener que introducir la distinción que ha asomado varias veces: no es lo mismo preguntarnos acerca de la posibilidad lógica de la ATM que por su posibilidad física[48].

En este sentido deberíamos, en primer lugar, retomar la acentuación de la problemática en el paso de la ejecución del programa al *output* concreto que pudiera devolver y volver a preguntarnos, junto a Shagrir (2004, p. 109), ¿por qué el argumento de Thomson «parecía tan pulcro y convincente en primer lugar»? Fue preguntándonos precisamente esto cuando introdujimos la problemática del *salto* respecto del *output*. Pero tal vez se pueda decir algo más.

Si se pudiera modelizar la *súper-tarea* de la lámpara de Thomson como una *serie de Grandi* de la forma $1 + 1 - 1 + 1 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ entonces podríamos, directamente, traer a colación que esta *no es* convergente y que, por tanto, nunca se podrá alcanzar este resultado –argumento parecido, pero más fuerte que el de Copeland–. El carácter de oscilación de la serie parecería que pudiera ser un argumento de peso en contra de la posibilidad de ejecución de la *súper-tarea*. Pero este argumento, por lo demás el único que se me ocurre, adolecería de un fallo relevante: los estados de la lámpara no son modelizables con las operaciones de la serie y, siendo estrictos, los elementos con los que se opera tampoco. Aquí 1 y 0 serían *números* –tal vez naturales, tal vez reales, o tal vez de otro tipo– mientras que, si queremos modelizar los estados de la lámpara, el *1* y el *0* que usaríamos serían eso mismo, estados, y en ningún caso entidades numéricas –más aún si uno se asoma a las axiomáticas conjuntistas para ver las definiciones estándar de 1 y 0 como *entidades numéricas*–. La *súper-tarea* que más podría acercarse a esta serie sería la de una ATM tomando la jarra de Littlewood y Ross, añadiendo y suprimiendo una sola bola de su interior. Y en este caso la pregunta ¿cuál será el contenido de la jarra tras infinitas operaciones? simplemente deja de ser enigmática o algo paradójico.

¿Y cómo explicamos la paradoja? ¿Cómo se puede abordar el problema del salto? Si lo analizamos despacio, veremos que la incompatibilidad se da entre el proceso y el resultado. Chihara y Copeland tomaron en su discusión lo primero como una dimensión lógico-computacional y lo segundo como un *estado de conocimiento*. Pero parece más interesante plantear lo primero como un ítem *abstracto* y lo segundo como uno *concreto*. Shagrir (2004) apunta que corremos el riesgo de tomar dos dimensiones distintas de la máquina. Bien podemos ser más serios en la respuesta y señalar esta confusión *modal* como el motivo.

De un lado, a nivel puramente *abstracto*, tenemos la *súper-tarea* bien definida y la ATM que no plantea ninguna problematicidad adicional en cuanto que tipo Turing en su definición. Aquí una máquina ejecuta un programa. Nos encontramos frente a una suma de series infinitas –divergentes–. La máquina imprime –como acto formal– 1 y 0 ilimitadamente. Cada paso está configurado en el anterior y hay determinismo lógico.

Por otro lado, a nivel *concreto*, desde la perspectiva física o de implementación, la máquina produce 1s y 0s por una dinámica concreta, en unas condiciones concretas y gobernada por otras leyes adicionales: las leyes físicas. Algo semejante a esto parecieron señalar Allis y Koetsier (1991, 1995), pero ellos finalmente se quedaron en la dimensión puramente geométrica. Las restricciones de van Bendegem (1994) y las de Shagrir (2004) sí que fueron en esta línea explícitamente, aunque ellos no han partido de una necesidad de caracterización lógica exhaustiva.

Además, Shagrir (2004), que es quien más ha desarrollado este tren de pensamiento, argumentó que se *podrían* tomar otras perspectivas distintas, pero que él señaló la física porque se trataba de la más fácil de diferenciar y ya se había discutido. Ahora bien, de nuevo, aquí parece que se puede adoptar una postura más radical. Si bien es cierto que podríamos adoptar *infinitas* perspectivas o dimensiones de análisis, también lo es que solamente estas dos –física y lógica– son las que justifican la problemática del salto. Y si la problemática del salto era la única que impedía tomar las ATMs como dispositivos lógicos, entonces su análisis y explicitación es, sin duda, mucho más que relevante. Además, parece que es una distinción lógicamente sostenible y, al menos, una postura metafísicamente relevante[49].

Las paradojas de Thomson y de *Littelwood-Ross* emergen[50] cuando se mezclan ambas perspectivas. Y, pareciera, además, que se podrá argumentar ahora que emergen, en concreto, cuando uno plantea la

[48] Shagrir (2004, 2019).

[49] Es importante notar que, asumida la distinción, no se necesita aquí decir nada más acerca de la relación entre *objetos concretos*, o espacio-temporales físicos, y los *objetos abstractos*.

[50] En el primer sentido de respuesta directa que hemos visto para ambas.

resolución de una *súper-tarea* como algo *lógicamente definible* pero *físicamente inimplementable*. Desde la perspectiva formal, todo paso está completamente determinado por el anterior, pero no podemos caracterizar *in concreto* el último si lo interpretamos como un *estado físico* concreto que alcanzaría una máquina concreta tras el transcurso de dos minutos, llegadas las 12 p.m., etc. La caracterización mental, intuitiva, que hagamos de la máquina[51] no nos permite distinguir ambos matices: la imagen en cuanto que imagen mental presenta una unidad. Y es este sentido en el que «hablar de *súper-tareas* es un *sinsentido*» (Thomson (1954, p.9)), pero no en otro. Shagrir (2004, p. 110) concluye que:

> El defecto del argumento [de Thomson] está en tomar el estado de la máquina, en el segundo minuto, no solamente como un estado físico, *sino también como un estado de una máquina de Turing*, mientras que la TM, en ese instante, ya no está especificada. El dispositivo, como TM, completa todas sus acciones *antes* del segundo minuto. Incluso si el dispositivo sobrevive a la aceleración, su estado físico tras dos minutos no es ya un estado de TM. Todos los infinitos estados de la TM pertinente han sido implementados en el intervalo temporal anterior al segundo minuto. Pero si el estado de la máquina, tras dos minutos, no es un estado de TM, no es necesario que siga siendo dictado por el estado anterior de la TM que especificamos. Desde la perspectiva de la TM, el estado de cualquier máquina después de 2 minutos sería perfectamente coherente con la TM acelerada que estaba en acción durante el intervalo [0, 2). La inconsistencia no emerge por ninguna parte.

Pero aquí el salto lo estamos dando ahora en el otro sentido: asumiendo que *no es físicamente* posible caracterizar la ATM en ese *estado-tras-la-ejecución* de la *súper-tarea* concreta que se trate. Por tanto, hay que matizar a Shagrir que no es cierto que «distinguiendo las perspectivas TM y física, vemos que no emerge ninguna paradoja» (p. 110). Esto es algo que solamente pasará si, además, damos el paso adicional de negar su *posibilidad física* y esto es aún una tarea pendiente.

Podemos preguntarnos, desde la perspectiva física:

1. Si la máquina está en algún estado físico tras completar la *súper-tarea*.
2. Si cada estado viene dictado por un estado *físico* anterior en su historia *física*.
3. Si la historia *física* consiste simplemente en imprimir 1s y 0s.

Pero también podemos subsumir todas las preguntas anteriores bajo una sola:

0. ¿Es implementable físicamente la ejecución y resolución de la *súper-tarea*?

Y la propia respuesta exigirá determinar cómo se hará, si puede hacerse, tal cosa.
Earman y Norton (1996, pp. 237-239) añadieron, además, la noción de *persistencia* como asunción implícita relevante a la hora de evaluar las paradojas en cuanto que tales. Esto pasaría por asumir que la información en la cinta no se modifica hasta la siguiente impresión. La persistencia ha de entenderse como el requerimiento de que la información del cuadrado en el *output*, tras los dos minutos, sea el límite de las impresiones en el propio cuadrado en el proceso anterior a los dos minutos. Y desde esta asunción no podrá ofrecerse una respuesta a la pregunta «*¿qué se imprimirá en dicho cuadrado tras los 2 minutos?*» simplemente porque ya no existe un límite a la serie que forman los estados de la cinta anteriores a dicho límite. Incluir la persistencia generaría paradojas para ellos. Pero este requisito parece mucho más débil. En primer lugar, se acerca demasiado a la reducción del proceso a una *serie aritmética*. Además, la presuposición de la persistencia, así como de la consistencia, no es, de entrada, ilegítima ni problemática *per se* –autocontradictoria en términos de Chihara–.

Finalmente, podemos ver que esa interpretación del criterio de *persistencia* es lo suficientemente laxa como para incluirse y explicarse desde la *doble perspectiva*. Por sí sola no adelantaría más que la identificación del problema como *el salto* del que veníamos hablando hasta ahora. Para Earman y Norton (1996, p. 239), «la máquina debe construirse para satisfacer una especificación inconsistente. Esto es claramente en imposible en cualquier dispositivo físico». Pero la gracia está en ver de *dónde* se deriva dicha inconsistencia y sólo la segunda oración de la cita lo señala. Incluso podría criticarse que, para ellos, en último término, la posibilidad física parecería depender de la lógica en un sentido fuerte: algo mucho más problemático que admitir su mera distinción.

[51] No necesariamente a nivel de *representación*, aquí podemos hablar en un sentido más abstracto. En cualquier caso, este punto refuerza la postura inicial de sospecha de una perspectiva que inicie un análisis basado en una lógica intuicionista.

Si no hubiera posibilidad lógica por la distinción modal, se bloquearía cualquier posibilidad física y la paradoja de Thomson volvería a emerger. La pregunta por el estado final, para Shagrir, sería una pregunta empíricamente interesante pero, como la persistencia no se satisfaría, no sería paradójica. Shagrir, en último término, acaba condenando la reafirmación de que, o bien no se trata de una TM –*à la* Copeland[52]–, o bien que no es implementable en absoluto en los términos de la dependencia modal arriesgada antes mencionada ya que, al margen de las implicaciones filosóficas directas, parece que surgiría una nueva paradoja: ¿por qué una ATM podría entonces resolver tareas que una TM no?

Puesto que rechazamos el argumento que lleva a este planteamiento, no nos adentraremos en esta segunda *pseudo-paradoja de Shagrir*. Las respuestas serán obvias:

1. Negar que haya computación efectiva o que, de haberla, sea Turing-computable, algo que ya hemos visto que es tan o más problemático que admitir lo que se quiere *resolver* con esta solución.
2. Distinguir un nuevo tipo de computación *en sentido interno*, donde se incluirían las funciones habituales, y una *en sentido externo* para que las ATMs solamente puedan operar en este segundo punto. Pero esto es una clasificación *ad hoc* sobre la distinción modal que, además, reinterpreta la propia definición de ATM de manera no-exhaustiva.

Así, preferimos mantener, con Shagrir (2004, 111-112) la doble perspectiva modal, aunque en una versión más fuerte. Lo que no admitiremos será la imposibilidad de implementación física sin necesidad de análisis ni argumentación, ni el rechazo a que el dispositivo *exista* o no como un ítem espacio-temporal tras los dos minutos en términos absolutos. También nos separamos de su postura al afirmar que, por definición las funciones de *debe* poder computar una ATM son las mismas que una TM: conservando la *efectividad* en la ejecución de la tarea en los términos que mencionamos en la primera sección a raíz de una *aceleración* ilimitada[53]. Aceleración que no es lógicamente contradictoria, aunque se llegue a demostrar que pueda ser –o sea– físicamente imposible. Además, de esta forma, podemos retomar la relación de todas estas discusiones con las polémicas *teístas* ya mencionadas e inaugurar una nueva posible aproximación interesante: ¿una *mente infinitaria* podría *volver* a plantearse como lógicamente posible, aunque luego maticemos su imposibilidad de implementación física? El *volver* es clave; subraya que estaríamos ante una caracterización de un nuevo tipo de *argumentos ontológicos*.

Y, si bien es cierto que uno podría adoptar una postura no-clásica y, por ejemplo, admitir como posibles y aproblemáticas las ATMs en los términos de la paradoja de Thomson desde una postura paraconsistente, también es cierto que nos encontraríamos, de adoptar esta estrategia, frente a un límite metodológico importante. Admitir una ATM como una entidad paraconsistente o auto-contradictoria tendrá claros y serios límites en lo que respecta a (i) su implementación física y (ii) su caracterización como dispositivo computacional –si es que podría llegar a hacerse–. Pensarlo en abstracto como un dispositivo o un proceso paraconsistentes en una discusión filosófica puede ser algo atractivo o sugerente, pero los desarrollos en lo que respecta a la ejecución del programa terminarán generando más problemas que soluciones[54]. Allis y Koetsier afirman que «para los constructivistas en la filosofía de las matemáticas u otros que rechacen el infinito actual, las *súper-tareas*, obviamente, no son un objeto aceptable de investigación» (1991, p.189 n. 1), por lo que cualquier lectura intuicionista también generará resultados muy distintos. No obstante, al margen de las diferentes escuelas, desde el punto de vista matemático clásico, no habría «objeciones *a priori* en contra de considerar secuencias infinitas de acciones bien definidas o las correspondientes secuencias infinitas de estados intermedios bien definidos» aún cuando la noción de «ejecución subsecuente completa de todos los actos involucrados va más allá de esto» (1991, p. 189). Si la perspectiva intuicionista es la acertada o no es algo que no podemos entrar a valorar aquí, aunque existen argumentos de peso para pensar que no es el caso.

Finalmente, debemos analizar un último argumento en contra de la posibilidad lógica de las *súper-tareas* propuesto por Benacerraf (1962). En caso de encontrar argumentos de peso en contra de la

[52] Con los inconvenientes que esto supone.

[53] Hamkins y Lewis (2000, p. 526): «el procedimiento clásico determina la configuración de la máquina (…) en cada estado alpha + 1, dada la configuración para cada estado alpha». Lo nuevo es el desarrollo de la máquina en un dominio transfinito. Shagrir (2004, p. 112): «este paso es un escenario límite ω_1, en el que el valor en la casilla designada para el *output* es el límite de los valores previos en dicha casilla, a saber, mostrar el estado de parada de la máquina *n*-ésima, actuar sobre el input *m*».

[54] Especialmente en lo relativo a uno de los principales límites de las aproximaciones paraconsistentes: la falta de criterio explícito para saber determinar qué *contradicciones* son legítimas y cuáles no.

propuesta de Benacerraf, podremos concluir positivamente acerca de su posibilidad lógica y estaremos legitimados a proceder con el análisis relativo a su posibilidad física: en caso de lograr negarla habríamos explicado la paradoja por la vía de la distinción modal.

Thomson (1957, p.1) planteó el siguiente argumento por analogía a la definición de *súper-tarea*:

1. Como «para completar cualquier viaje debes completar un número infinito de viajes» y para llegar de A a B pasar primero desde A a A' y luego de A' a A'', etc.
2. Pero «es lógicamente absurdo que alguien deba haber completado todos los viajes de una serie infinita, tal y como es lógicamente absurdo que alguien deba haber completado todas las tareas de una serie infinita»,
3. Entonces «es absurdo que nadie haya completado nunca un viaje».

Y al margen de quienes puedan aceptar la primera premisa, la segunda o ambas, Benacerraf propuso una segunda solución: «La expresión "completar un infinito número de viajes" puede tomarse en dos sentidos. Si es tomada en uno, la primera premisa es falsa y la segunda verdadera; en el otro, la primera es verdadera y la segunda es falsa. Ninguna manera de interpretarlo mantiene *ambas* premisas como verdaderas» (1962, p. 766). El primer sentido se refiere a entender por «viaje» un «viaje continuado ininterrumpido» que cubra todos los puntos intermedios de la primera premisa: si no se cumple un solo punto, entonces no se ha viajado y cada viaje se compone de infinitos sub-viajes y pasan a ser indistinguibles. Si la segunda premisa fuera verdad, sería lógicamente absurdo que alguien pudiera completar un número infinito de viajes y, por tanto, la primera habría de ser falsa: no se necesita completar infinitos viajes para concluir uno solo.

Thomson primero tomaría la segunda premisa bajo esta última interpretación y, tomándola como verdadera, concluye que es lógicamente cierto que sea imposible lógicamente completar un número infinito de viajes –o realizar un número infinito de tareas– y, por tanto, las ATMs. Esto encajaría de nuevo con su lectura como *autocontradictorias*. Y para Benacerraf (1962, p. 767) Thomson debe mostrar «por qué, bajo la primera interpretación de «completar un número infinito de viajes», la segunda premisa se vuelve falsa, pero a algunos les puede parecer verdadera». Para Benacerraf estas tareas serán lógicamente imposibles pero por motivos distintos. Volvamos a la lámpara.

Benacerraf nos invita a pensar en un personaje que la deje *encendida* en el minuto 2, cuando Thomson pregunta, y en otro, Bernard, que la deja *apagada*. Ninguna de estas acciones sería, en sí misma, autocontradictoria. Que automáticamente le volviesen a dar para cambiar el estado solamente es verdad antes de ese minuto 2 de resolución: «no hay un instante entre t_0 y t_1 en el que la lámpara estuviera encendida y que no se siguiese de un instante, también antes de t_1 en el que estuviera apagada» (1962, p. 768), pero interesa la lámpara en t_1 y después. Hemos vuelto al punto de partida de la presente sección. Las instrucciones de Thomson no cubren la lámpara en t_1.

A partir de aquí, Benacerraf incluye varios argumentos auxiliares: uno en que añade predicados arbitrarios sobre secuencias aritméticas de números –que descartamos por lo dicho antes respecto del caso de la serie de Grandi– y uno en forma de *diálogo* en el que ensaya la posibilidad de añadir premisas auxiliares. Pero su solución, incluir la distinción entre *súper-tareas* y *super-duper-tasks*, volverá a tener el problema de recurrencia *ad infinitum* que tenía la inclusión de *sobre-máquinas* de Chihara. En cualquier caso, no llega a plantear la emergencia de la contradicción en términos de la doble perspectiva, aunque llega a acercarse al plantear que: «bastará, por ejemplo, con mostrar que forma parte del nombre "tarea" el hecho de que nada pueda llamarse "tarea" sin que tome algún tiempo de ejecución *y* que existe un límite inferior en la longitud del intervalo admisible para la ejecución de una simple tarea» (p. 781) y remite a argumentos limitativos físicos: «solamente quiero decir que no hay unas circunstancias que podamos imaginar y describir en las que podamos decir justificadamente que una secuencia infinita de tareas ha sido completada» (p. 782).

Por todo lo anterior, el siguiente paso natural es el de abordar las condiciones de posibilidad de *implementación* física. Este paso es al que se acercaron mucho Allis y Koetsier (1991, 1995), pero ellos terminaron limitándose a formalizaciones geométricas[55]. Ellos pensaron en los resultados paradójicos de Littlewood y Ross como «discos circulares que asumen una posición en el plano (...) en nuestra

[55] Y, evidentemente, una teoría física, aunque utilice una geometría concreta en sus desarrollos mecánicos o cinemáticos, *no* se reduce a esta geometría. Aunque formalizar un objeto en ella sea el primer paso y condición necesaria, no es suficiente.

interpretación, la urna simplemente es un conjunto señalado no vacío en el plano. Una bola se considera dentro de la urna si el centro del disco circular que la representa es un elemento del conjunto señalado. La bola está fuera de la urna si su centro no es un elemento del conjunto» (1991, p. 190), todo esto en un espacio euclídeo. Al igual que para Benacerraf, la secuencia «no implica nada nuevo» (1991, p.190) respecto del resultado final a las 12p.m. y la situación a las 12 p.m. se basa en «una interpretación implícita con una o más asunciones implícitas» relativas a las implicaciones derivadas del hecho de completar cada una de las sub-tareas que relacionan, muy tenuemente, la *emergencia* de la paradoja en términos de incompatibilidad lógico-física[56]. Lo que ellos proponen es la interpretación *cinemática* y que en las *súper-tareas* se asumen: un espacio euclídeo, elementos rígidos –nosotros diremos materiales– moviéndose en dicho espacio y un *principio de continuidad*: «si en algún instante antes de las 12 p.m. una bola pasa a estar en una posición determinada que no abandona hasta las 12 p.m., entonces está también en esa posición a las 12».

Aunque parezca dudoso que cualquier formulación original aceptase este principio en esa *forma condicional*[57] sí que es cierto que parece ser uno de los principales puntos concretos de ruptura entre el análisis lógico y el físico y habrá de ser el primer lugar por el que comenzar el estudio de las posibilidades físicas de implementación de las mismas ATM.

Finalmente, el último argumento en contra de la posibilidad lógica de las ATMs es el propuesto por van Bendegem (1994)[58]. Según este argumento la paradoja de Littlewood-Ross no es posible lógicamente y se puede llevar al absurdo con la siguiente demostración:

1. Sea S el número total de bolas al completar la *súper-tarea.*
2. $S = (10 - 1) + (10 - 1) + \cdots$
3. Hipótesis: S es un número finito de bolas incluyendo el caso especial $S = 0$
4. $9 + S = (10 - 1) + S = (10 - 1) + (10 - 1) + (10 - 1) + \cdots = S$
5. $9 + S = S$
6. Si S es finito, entonces $9 = 0$.

En realidad, lo que se podría concluir es que, si S es finito, entonces $9 + S = S$ y, desde aquí, argumentar que o bien $9 = 0$ o bien que $S = S - 9$. Y, para descartar esto último, un paraconsistente nos exigiría algo más de precaución y puede que alguna justificación: en otro contexto podríamos hacer caso omiso pero, claro, estamos hablando de una paradoja. Pero, también pudiera ser que el problema estuviera en S; ¿es legítima la sustitución que se realiza? Para Allis y Koetsier (1995, p. 244) «el argumento muestra bien cómo de fácil es evitar asunciones implícitas cuando se piensa sobre paradojas». El fallo estaría en la definición de *súper-tarea*, que solamente implica que para cada n, a $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ minutos antes de las 12 p.m., hay $9n$ bolas en la urna que se representa aquí como $= (10 - 1) + (10 - 1) + \cdots$, equivalente a $S = \lim_{n \to \infty} (10 - 1)$, lo que implica que $S = \infty$ «y que es una asunción de continuidad, desde la cual no es difícil derivar una contradicción con la suposición de que S es finito» (1995, p. 245).

6. Conclusiones: posibilidad física de implementación

Podemos concluir que existe una vía de caracterización de las *súper-tareas* y de las ATMs consistente: aquella que presta atención al *proceso de ejecución* y al salto que supone el *estado físico* final de la máquina como raíz de toda paradoja. Si nos preguntamos solamente por la primera parte, es decir, por su caracterización puramente lógico-formal, veremos que, efectivamente, se puede admitir que son *lógicamente posibles* y que, desde una perspectiva no construccionista, existen en cuanto que formalismos.

Por tanto, queda ahora pendiente abordar el estudio de las posibilidades físicas. Todo parece señalar que existen ciertos límites mecánicos basados en los resultados de la relatividad especial[59] como mecánica adecuada para estos procesos que impedirían la implementación computacional de dispositivos tipo Turing acelerados. La asunción de una velocidad y aceleración límites parecerían

[56] Sin llegar, insistimos, a explicitar esto por limitarse a un análisis geométrico.
[57] Aquí entran todas las interpretaciones asignificativas del condicional que, sin ser *paradojas de la implicación material*, parecen problemáticas: piénsese en el caso en que tanto antecedente como consecuente son falsos o en el que el antecedente es falso y el consecuente verdadero.
[58] Holgate (1994) establece una crítica parecida, aunque más conservadora.
[59] French (1968).

bloquear cualquier posibilidad de implementación física. Sin embargo, se ha discutido en la literatura científica la *posibilidad física* de implementar estos dispositivos en espacios –tipo *anti-de-Sitter*– coherentes con la solución a las ecuaciones de Einstein, por lo que habrá que evaluar los límites marcados también por los resultados de la *relatividad general* y será interesante, también, sin duda, abordar en este contexto posibles soluciones que se han dado en experimentos de interferometría cuántica[60] como posibles soluciones al problema de la implementación física de las ATMs.

En caso de obtener una respuesta afirmativa a la solución de la posibilidad de implementación, la respuesta a la pregunta por la existencia de las ATMs será afirmativa en sentido fuerte. En caso de que quede bloqueada esta posibilidad –por ejemplo, porque todas estas posibilidades solamente sean hipotéticas y, en último término, continúen siendo lógicas–, la respuesta será afirmativa, pero en un sentido débil: las ATMs solamente existirán como *objetos abstractos* caracterizables lógico-matemáticamente. En cualquier caso, las paradojas quedarían resueltas, pero el *modo* en cómo se resuelvan y la respuesta que se ofrezca alumbrará luz a la pregunta por los límites del conocimiento en general al entrar en conexión con el problema de parada, los argumentos gödelianos y ciertas discusiones teístas pudiendo estar en disposición de arrojar algo de luz sobre la pregunta acerca de qué es lo que limitan exactamente los meta-teoremas limitativos.

[60] En este caso habría que evaluar las unidades mínimas de Plank en términos mecánicos y tomar partido respecto de distintas posturas interpretativas mecánico-cuánticas. Los experimentos de *medidas sin interacción* aplicados a procesos computacionales se revelan como candidatos interesantes para este debate: especialmente atendiendo al efecto Zenón cuántico, Gherab y Sánchez (2010) y a la *computación contrafáctica* analizada desde una perspectiva filosófica, Fernández y Sánchez (2022).

Referencias

Achtner, W. (2005). Infinity in science and religion. The creative role of thinking about infinity. *Neue Zeitschrift für systematische Theologie und Religionsphilosophie*, 47, 392-411. https://doi.org/10.1515/nzst.2005.47.4.392.

Allis, V. y Koetsier, T. (1991). On some paradoxes of the infinite I*. The British Journal for the Philosophy of Science*, 42, p. 187-194.

Allis, V. y Koetsier, T. (1995). On some paradoxes of the infinite II. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 46, 235-247. https://doi.org/10.1093/bjps/46.2.235.

Alonso, J. A. et al. (2007). *Curso práctico de teoría de conjuntos*. Repositorio de la Universidad de Sevilla: <http://www.cs.us.es/~jalonso/publicaciones/2007-LibroTeoriaConjuntos.pdf>.

Ambrose, A. (1935). Finitism in Mathematics (I y II). *Mind*, 35, 186-203 y 317-340. https://doi.org/10.1093/mind/xliv.174.186.

Benacerraf, P. (1962). Tasks, Super-Tasks, and the Modern Eleatics. *Journal of Philosophy* 59, 765-784. https://doi.org/10.2307/2023500.

van Bendegem, (1994). Ross' Paradox is an Impossible Super-task. *British Journal of Philosophy of Science*, 45, 743-748: 743-748. https://doi.org/10.1093/bjps/45.2.743.

Benítez, A. (2022). *Inteligencia Artifical en perspectiva*. Madrid.

Black, M (1951). Achilles and the Tortoise, *Analysis* 11, 91–101.

Blake, R. M. (1926). The Paradox of Temporal Process, *Journal of Philosophy* 23, 645–654.

Boolos, G. S. y Jeffrey, R. C. (1980). *Computability and Logic,* 2nd edition, Cambridge: Cambridge University Press.

Carnap, R. (1932). Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache. *Erkenntnis*, II.

Chihara, C. S. (1965). On the Possibility of Completing an Infinite Process, *Philosophical Review* 74, 74–87. https://www.jstor.org/stable/2183531.

Copeland, B. J. (2002). Accelerating Turing Machines. *Minds and Machines* 12, 281-300. https://doi.org/10.1023/A:1015607401307.

Copeland, B.J. and Sylvan, R. (1999). Beyond the Universal Turing Machine, *Australasian Journal of Philosophy* 77, 46–66. https://doi.org/0.1080/00048409912348801.

Diels, H. y Krantz, W. (1952). *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Sexta Edición. Cambridge.

Doyle, J. (1982). *What is Church's Thesis?* Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, MA.

Drake, F. (1974). *Set Theory*. North Holland.

Earman, J. y Norton, J. D. (1993). Forever Is a Day: Supertasks in Pitowsky and Malament–Hogarth Spacetimes. *Philosophy of Science 60*, 22–42. https://doi.org/10.1086/289716.

Earman, J. y Norton, J. D. (1996). Infinite Pains: The Trouble with Supertasks, en A. Morton and S.P. Stich, eds., *Benacerraf and his Critics,* Oxford: Blackwell.

Fernández Cuesta, J. A. (2022). La lógica modal como herramienta metodológica en epistemología: notas para (otra) posible superación de los argumentos escépticos. *Human Review. International Humanities Review,* 11, 71-79. https://doi.org/10.37467/gkarevhuman.v11.3016.

Fernández Cuesta, J. A. y Sánchez Ovcharov, C. (2023). Contrafácticos Cuánticos: aproximación lógico-filosófica a las medidas cuánticas sin interacción. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia, 23* [aceptado y pendiente de publicación].

Fernández Mateo, J. (2022). *Realidad artificial. Un análisis de las potenciales amenazas de la inteligencia Artificial*. VISUAL REVIEW. International Visual Culture Review / Revista Internacional De Cultura Visual, 9(2), 235–247. https://doi.org/10.37467/revvisual.v9.5004

Fernández Prida, J. (2004). *Teorías inseparables*. Madrid: Trotta.

Frápolli Sanz, M. J. (2014). *Cuerpos y números ¿Qué significa existir?* En Villar Ezcurra, A. y Sánchez Orantos, A. (eds.), Una ciencia humana: libro homenaje a Camino Cañón Loyes (pp. 59-72). Universidad Pontificia de Comillas.

Frápolli Sanz, M. J. (2023). *The Priority of Propositions. A Pragmatist Philosophy of Logic*. Springer: Synthese Library, 475.

French, A. P. (1968). *Special Relativity*. MIT Introductory Physics.

Gherab Martín, K. (2022). Mentes contra Máquinas: revisión histórica y lógico-filosófica del argumento gödeliano de Lucas-Penrose. *Human Review. International Humanities Review*, 11, 185-195. https://doi.org/10.37467/revhuman.v11.4503.

Gherab Martín, K. y Sánchez Ovcharov, C. (2010). Conociendo el efecto Zenón cuántico en experimentos contrafácticos: una aproximación filosófica. *Ontology Studies* 10, 115-130.
Gold, E. M. (1965). Limiting Recursion. *Journal of Symbolic Logic* 30, 28–48. https://doi.org/10.2307/2270580.
Grünbaum, A. (1968). *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, London: Allen and Unwin.
Hamilton (1982). *Numbers, Sets and Axioms: The Apparatus of Mathematics*. New York: Cambridge University Press.
Hamkins (2002). Infinite Time Turing Machines. *Minds and Machines,* 12, 521-539. https://doi.org/10.1023/A:1021180801870.
Hamkins, J. D. y Lewis, A. (2000). Infinite Time Turing Machines. *Journal of Symbolic Logic*, 65, 567–604. https://doi.org/10.2307/2586556.
Hinton, J.M and Martin, C.B. (1954). Achilles and the Tortoise. *Analysis* 14, 56–68.
Hofstadter, D.R. (1980). *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Harmondsworth: Penguin.
Hogarth, M.L. (1992). Does General Relativity Allow an Observer to View an Eternity in a Finite Time?. *Foundations of Physics Letters* 5, 173–181. https://doi.org/10.1007/BF00682813.
Holgate, J. (1994). Mathematical Notes on Ross' Paradox. *British Journal for the Philosophy of Science*, 45, 302-4.
Kripke (1982). Wittgenstein on Rules and Private Language. Harvard: Harvard University Press. Leblac (1993). Infinity in theology and mathematics*. Religious Studies* 29, 51-62.
Littlewood (1953). *A Mathematician's Miscellany*. London: Methuen.
Malík, J. (2022). *Wrestling with the Posthuman: Understanding the Relationship between Human Autonomy and Technology.* TECHNO REVIEW. International Technology, Science and Society Review /Revista Internacional De Tecnología, Ciencia Y Sociedad, 11(2), 141–158. https://doi.org/10.37467/gkarevtechno.v11.3252.
Manzano, M. y Aranda, V. (2022). *Many-Sorted Logic*. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Edward N. Zalta and Uri Nodelman eds. < https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/logic-many-sorted/>.
Ordóñez Pinilla, C. A. (2006). Monismo anómalo, intencionalidad, falacias mentales e inteligencia artificial. Bajo Palabra, (1), 38–54. https://doi.org/10.15366/bp2006.1.004.
Post, E.L. (1936). Finite Combinatory Processes – Formulation 1. *Journal of Symbolic Logic* 1, 103–105.
Priest, G. (2012). *An Introduction to Non-Classical Logic*. Segunda edición. Cambridge University Press.
Priest, G. (2014). *One: Being an Investigation Into the Unity of Reality and of its Parts*. New York: Oxford University Press.
Putnam, H. (1965). Trial and Error Predicates and the Solution of a Problem of Mostowski. *Journal of Symbolic Logic* 30, 49–57. https://doi.org/10.2307/2270581.
Rayo, A. y Williamson, T. (2003). *A Completeness Theorem for Unrestricted First-Order Languages*. En J. C. Beall ed. *Liars and Heaps: New Essays on Paradox*, Oxford: Oxford University Press.
Ross (1988). *A First Course in Probability*. Tercera edición. New York & London: Macmillan.
Royce (1899). *The World and the Individual*. Macmillan.
Russell, B.A.W. (1915). *Our Knowledge of the External World as a Field for Scientific Method in Philosophy*. Chicago: Open Court.
Russell, B.A.W. (1918). The Philosophy of Logical Atomism. En *Logic and Knowledge*, R. C. Marsh ed. London: Allen & Unwin, 177-281.
Russell, B.A.W. (1924). Logical Atomism. En *Logic and Knowledge*, R. C. Marsh ed. London: Allen & Unwin, 160–179.
Russell, B.A.W. (1936). The Limits of Empiricism. *Proceedings of the Aristotelian Society* 36, 131–150.
Schlick, M. (1930). *Die Wende der Philosophie*. Erkenntnis I.
Shagrir, O. (2004). Super-tasks, accelerating Turing machines and uncomputability. *Theoretical Computer Science*, 317, 105-114. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2003.12.007.
Copeland, J. y Shagrir, O. (2007). Physical computation: How general are Gandy's principles for mechanisms? *Minds and Machines* 17, 217-231. https://doi.org/10.1007/s11023-007-9058-2.
Steinhart (2007). *Infinitely complex machines.* Intelligent Computing Everywhere. London: Springer, 25-43.
Stewart (1991). Deciding the Undecidable. *Nature* 352, 664–665. https://doi.org/10.1038/352664a0.

Taylor (1951). Mr. Black on Temporal Paradoxes. *Analysis* 12, 38–44.
Thomson (1954). Tasks and Super-Tasks. *Analysis* 15, 1–13.
Turing (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 42 (1936–37), 230–265.
Turing (1950). '*Programmers' Handbook for Manchester Electronic Computer.* University of Manchester Computing Laboratory. Un facsimile digital del original se puede consultar en *The Turing Archive for the History of Computing*: <http://www.AlanTuring.net/programmers_handbook>.
Tymoczko y Henle (1995). *Sweet Reason: A Field Guide to Modern Logic*. Freeman Press.
Van Bendegem (1994). Ross' Paradox is an Impossible Super-task. *British Journal of Philosophy of Science*, 45, 743-748. https://doi.org/10.1093/bjps/45.2.743.
Watling (1952). The Sum of an Infinite Series. *Analysis* 13, 39–46. https://doi.org/10.1093/analys/13.2.39.
Weyl, H. (1927). *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Munich: R. Oldenbourg. Traducción inglesa citada siguiendo Weyl, H. (1963). *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. New York: Atheneum.