Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología, 7(1), 2020, ISSN 2386-8791
 DOI: https://doi.org/10.37467/gka-revedumat.v7.2700
 https://journals.eagora.org/revEDUMAT

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA CLASE DE MATEMÁTICAS

El método de solución gráfico de los sistemas de ecuaciones lineales

Didactic Analysis of the Math Class: the Graphic Solution Method of the Systems of Linear Equations

LUIS ALEJANDRO ROBAYO LEÓN

Universidad de Cuahtémoc, México

KEY WORDS

Didactic suitability
Didactic analysis
Reflective process
Teacher in service
Systems of linear equation

ABSTRACT

This article studies the classroom practices of two mathematics teachers when addressing the method of graphical solution of systems of linear equations 2 x 2. Through the Didactic Analysis model, a detailed description was made and allowed to obtain an evaluative scale of the teaching process. This was done from a Case Study methodology and whose main instruments were video recordings and class transcripts. It is established that the graphic method is relegated only to study the types of solutions of a system, but it is ignored that its didactic potential goes further.

PALABRAS CLAVE

Idoneidad didáctica
Análisis didáctico
Profesores en servicio
Sistemas de ecuaciones lineales.

RESUMEN

En este artículo se estudia las prácticas de aula de dos profesores de matemáticas al abordar el método de solución gráfico de sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2. A través del modelo Análisis Didáctico *se hizo una descripción minuciosa y permitió obtener una escala valorativa del proceso de enseñanza. Esto se hizo desde una metodología de* Estudio de Caso *y cuyos principales instrumentos fueron las videograbaciones y transcripciones de clase. Se establece que el método gráfico es relegado sólo para estudiar los tipos de solución de un sistema, pero se ignora que su potencial didáctico va más allá.*

Recibido: 18/10/2020
Aceptado: 05/12/2020

1. Introducción

Los bajos resultados en matemáticas para un país como Colombia han llevado a realizar diversas reformas curriculares sin obtener los resultados esperados. Estas reformas desconocen un factor prioritario, las prácticas de aula de los profesores de matemáticas que llevan a cabo en el salón de clase. Este artículo hace parte de los resultados parciales del estudio de investigación *Análisis didáctico a partir del proceso reflexivo de prácticas de los profesores en servicio: sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2* que busca describir el impacto que tendría en los profesores de matemáticas en servicio participar en un proceso reflexivo que indague sobre sus propias prácticas de aula.

En éste artículo se describe un primer hallazgo que se dio al caracterizar las prácticas de aula de dos profesores de matemáticas de una institución al enseñar el *método de solución gráfico* de los sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2.

2. Marco teórico

2.1. Análisis Didáctico

El Enfoque Ontosemiótico de investigación en didáctica de la matemática (EOS), desde el año 1994, ha ido construyendo un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas, que sintetizan y unifican muchos hallazgos desarrollados en la Didáctica de la Matemática. En relación al estudio de análisis de procesos de enseña y aprendizaje de conceptos matemáticas, se encuentre el constructo de *Análisis Didáctico* Font, Godino y Contreras, (2008); Godino et ál. (2017). Este tipo de análisis se desglosa en cinco niveles: (i) Identificación de prácticas matemáticas, (ii) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, (iii) Análisis de trayectorias e interacciones didácticas, (iv) Identificación del sistema de normas y meta-normas, (v) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Los primeros cuatro niveles hacen un análisis descriptivo sobre lo que sucede en la clase, mientras la valoración de idoneidad didáctica, evalúa la pertinencia de la instrucción.

Este último nivel de análisis tiene la función de establecer los criterios generales en que se debe adecuar con pertenencia las acciones que realizan los docentes; esto con relación a los conocimientos matemáticos que están en juego en el proceso educativo y de los recursos que pueden ser utilizados en el mismo. Es importante entender la idoneidad didáctica como un punto de partida que aborda la instrucción de clase y la orienta hacia una mejora progresiva (Godino, 2012). Para ello, la idoneidad didáctica del EOS comprende de seis criterios:

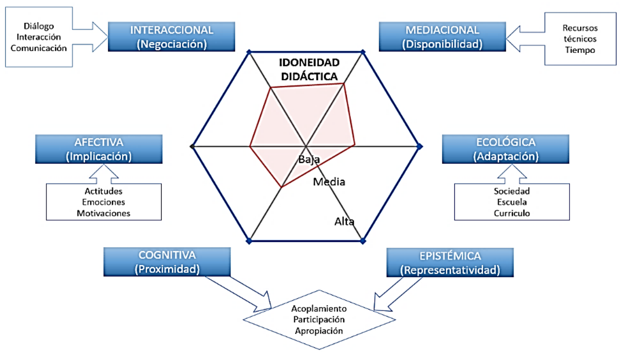
Tabla 1. Idoneidades didácticas

Idoneidad	Descripción
Epistémico	Grado de representatividad entre lo que se pretende enseñar en la escuela, respecto al objeto matemático a estudiar.
Cognitivo	Grado de aprendizaje de los estudiantes respecto lo que se pretende enseñar en la escuela.
Interaccional	Grado en que los tipos de interaccion dan la posibilidad de identificar y resolver conflicto de significado.
Mediacional	Grado de acondicionamiento de recursos materiales y temporales para ejecutar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
Afectivo	Grado de implicación (interés, motivación) de los estudiantes en su proceso de estudio.
Ecológico	Grado en el que existe un ajuste entre directrices institucionales y la sociedad con el proceso de etudio. Asimismo, se tiene en cuenta las condiciones del entonrono en que se desarrolla este ajuste.

Fuente(s): Godino et al, (2013).

La *figura 1*, es una representación gráfica de lo que se pretende hacer, se debe entender el hexágono regular como la representación de un estudio planificado, que es el que supone el límite máximo que puedan alcanzar las idoneidades parciales; es decir, representa el ideal de lo que se quiere alcanzar por medio de la idoneidad didáctica. En ese sentido, el hexágono irregular interno muestra el grado de idoneidad que se ha logrado de manera efectiva en el desarrollo de un proceso de estudio implementado (Godino, 2011).

Figura 1. Hexágono de idoneidades didácticas.



Fuente: Adaptado de Godino, (2011).

2.2. Criterios de Idoneidad Didáctica

La ventaja de la *idoneidad didáctica* es la de servir como un instrumento que permite evaluar las prácticas de aula de los docentes de matemáticas que la imparten. Para darle un carácter operativo, el EOS ha desarrollado un sistema de indicadores que permiten guiar un análisis y dar una valoración. En la *tabla 3* se enmarcan algunos de estos indicadores junto a sus componentes.

Tabla 2. Criterios de idoneidad didáctica.

Idoneidad	**Componentes**
Epistémico	Errores, Precisión, Riqueza de procesos, Representatividad.
Cognitivo	Conocimientos previos, Adaptaciones curriculares respecto a las diferencias individuales, Aprendizaje.
Interaccional	Interacción docente-discente, Interacción entre discentes, Autonomía, Evaluación formativa.
Mediacional	Recursos materiales, Número de alumnos, horario y condición del aula, Tiempo
Afectivo	Intereses y necesidades, Actitudes, Emociones.
Ecológico	Adaptación al currículo, Apertura hacia la innovación didáctica, Adaptación socio profesional y cultural. Conexión intra e intradisciplinar.

Fuente: Godino et al. (2013).

3. Marco metodológico

El interés por estudiar las prácticas de aula de los docentes en servicio enmarco la investigación en un *Estudio de Caso* (Cohen y Manión, 1999). Enfocándose en las acciones que realizan los profesores en sus clases de matemáticas al abordar los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 (que para efectos de éste artículo se centran en el tratamiento que dieron al método de solución gráfico). Estas acciones fueron contrastadas con los *criterios de idoneidad didáctica*.

3.1. Contexto

El proceso formativo se desarrolló en la Institución Educativa Narciso José Matus Torres del municipio de Villavicencio (Colombia). Esta institución contaba con nueve profesores de matemáticas que oscilaban entre los 30 y 50 años de edad. Para el trabajo de campo, se invitó a los docentes a participar en el proceso reflexivo a través de una reunión del área de matemáticas autorizadas por los administrativos docentes. Cinco profesores aceptaron hacer parte del proceso formativo, cuatro profesores de básica secundaria y una profesora de educación básica primaria.

Para este artículo se expone el trabajo realizado por dos profesores (Los cuales se denominarán profesor 1 y profesor 2). Ambos licenciados en matemáticas y física de la misma universidad pública y con una maestría en tecnológicas digitales aplicadas a la educación. En el año 2019 cumplieron 10 y 8 años de experiencia docente respectivamente. Los participantes del estudio no tuvieron ningún problema con en número de clases a grabar y seleccionaron la temática *métodos de solución de sistemas de ecuaciones 2 x 2.* Las clases del profesor 1 fueron grabadas en el año 2018 y las del profesor en el año 2019.

3.2. Protocolo

Los principales instrumentos fueron registros de audio y video de cada una de las clases de matemáticas de los profesores participantes del estudio. Al estar interesados en las prácticas de aula de los docentes es importante: las indicaciones del profesor a sus alumnos, los tipos de interacciones, la manera en que se organiza el salón, las formas de participación, etc. Como afirma Hernández, Fernández y Baptista (2014) la acción de observación significa estar atento a los pequeños detalles de lo que sucede. Además, el uso de videograbación tiene la ventaja de poder ser analizada meticulosamente, por esa característica de repetirse y detenerse cuántas veces sea necesario; además, si se quiere, puede ser estudiada nuevamente con otros jueces, protocolo o escalas (Martínez-Rizo, 2012). Otro instrumento de análisis fue la transcripción de las videograbaciones de cada una de las sesiones de clase.

Con los videos de las clases de cada profesor y sus respectivas transcripciones, se dispuso a realizar un análisis preliminar, este consistió en identificar las *Configuraciones Didácticas (*CD*)* que se observaban en las mismas. Para el estudio, una CD es un fragmento de clase en la cual se comienza una tarea (situación problema, pregunta, ejercicio), se da por finalizada cuando el docente establece que se ha solucionado y plantea otra. En éste análisis preliminar, las posibles CD se anotaban en una columna de observación del formato de transcripción indicando su inicio y final, asimismo en esta misma columna se hacían observaciones que pudieran ser de interés de algunos de los cinco niveles del análisis didáctico. Esta revisión se hizo una segunda vez para corroborar si el fragmento de clase correspondía efectivamente a una CD. De acuerdo a este criterio y centrado en las clases del método de solución gráfico se obtuvieron 21 CD en una clase para el profesor 1 y 6 CD para el profesor 2, cada uno en un promedio de dos clases.

4. Resultados

En este apartado se presenta el *análisis didáctico* de cada uno de los profesores participantes del estudio. Es importante aclarar que en el presente artículo solo se describen las clases centradas en el estudio de los tipos de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, la investigación de la que proviene abarca también métodos de solución algebraico, los cuales pueden ser consultados en el estudio original.

Para la presentación de estos resultados, en primer lugar, se realiza una contextualización de las clases analizadas, donde se exponen las principales actividades realizadas en las sesiones. Después, se muestran los cuatro niveles descriptivos del *análisis didáctico*, comenzando por la *identificación de las prácticas matemáticas*, seguido por la descripción de los *objetos y procesos matemáticos*, *análisis de las interacciones didácticas*, y la *identificación de las normas y meta-normas*. Finalmente, se hace la *valoración de la idoneidad didáctica* de cada trayectoria. Es importante señalar que la contextualización de las clases y el primer nivel de análisis (*identificación de las practicas matemáticas*) se presentan de manera separada para cada profesor, los demás niveles de análisis se presentan en conjunto.

4.1. Contextualización de clases e identificación de prácticas matemáticas del Profesor 1.

El profesor 1, para la grabación de clases, seleccionó a un grado noveno de básica secundaria perteneciente a la jornada de la mañana (6:15 am a 12:15 pm). En relación al grupo de estudiante, se trató de un grupo heterogéneo de 39 alumnos (20 hombres y 19 mujeres), que mostró una actitud positiva frente a la asignatura y a nivel disciplinario no se observaron dificultades que impidieran el correcto desarrollo de las clases.

Tabla 3. Distribución de las sesiones y configuraciones didácticas del profesor 1.

SESIÓN	*DESCRIPCIÓN*	*CD*
1	Introducción al concepto de sistema de ecuación lineal 2 x 2. Introducción al método de solución gráfico. Tipos de solución (solución única, sin solución e infinitas soluciones). Al finalizar la clase se propone el primer taller.	CD1 a CD8
2	Revisión y corrección del primer taller. Introducción al método de sustitución.	CD9 a CD21

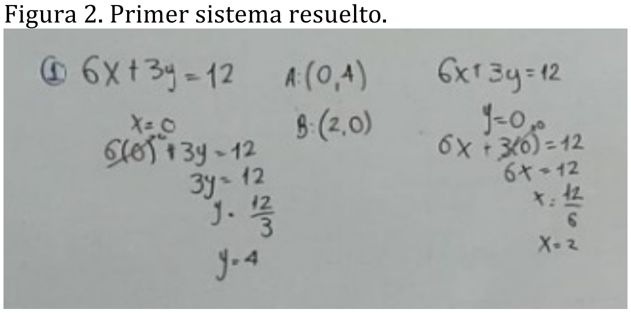
Fuente: Elaboración propia.

La primera sesión inicia recordando cómo se grafica una recta, temática trabajada en sesiones previas. Particularmente, el profesor 1 enfatiza en una estrategia para obtener dos puntos de la recta:

i. Para obtener un primer punto, remplazar $x = 0$ y después despejar la incógnita ´y´ de la ecuación resultante.
ii. Para obtener el segundo punto, remplazar $y = 0$ y después despejar la incógnita ´x´ de la ecuación resultante.

En la *figura 2*, se muestra un registro fotográfico de un primer ejemplo explicado por el docente. A partir de la construcción de las dos rectas cuestiona a los estudiantes sobre las maneras en que se comportan estas rectas. A partir de ahí, se estudian los tres tipos de solución: única solución *[CD1],* no tiene solución *[CD3]* y soluciones infinitas *[CD4].*

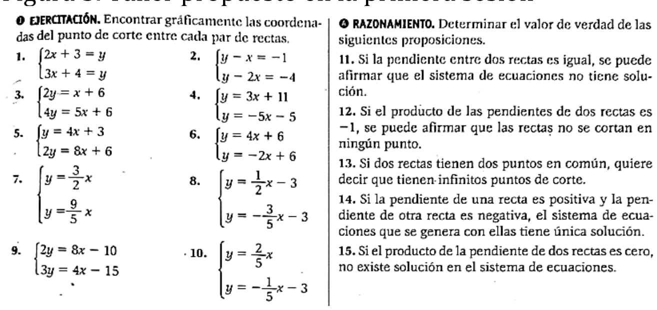
Figura 2. Primer sistema resuelto.



Fuente: Registro fotográfico.

Posteriormente, se propone a los estudiantes una guía de trabajo, ver *figura 3.*

Figura 3. Taller propuesto en la primera sesión



❶ EJERCITACIÓN. Encontrar gráficamente las coordenadas del punto de corte entre cada par de rectas.

1. $\begin{cases} 2x + 3 = y \\ 3x + 4 = y \end{cases}$
2. $\begin{cases} y - x = -1 \\ y - 2x = -4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2y = x + 6 \\ 4y = 5x + 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y = 3x + 11 \\ y = -5x - 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y = 4x + 3 \\ 2y = 8x + 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y = 4x + 6 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ y = \frac{9}{5}x \end{cases}$
8. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ y = -\frac{3}{5}x - 3 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2y = 8x - 10 \\ 3y = 4x - 15 \end{cases}$
10. $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x \\ y = -\frac{1}{5}x - 3 \end{cases}$

❹ RAZONAMIENTO. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

11. Si la pendiente entre dos rectas es igual, se puede afirmar que el sistema de ecuaciones no tiene solución.
12. Si el producto de las pendientes de dos rectas es −1, se puede afirmar que las rectas no se cortan en ningún punto.
13. Si dos rectas tienen dos puntos en común, quiere decir que tienen infinitos puntos de corte.
14. Si la pendiente de una recta es positiva y la pendiente de otra recta es negativa, el sistema de ecuaciones que se genera con ellas tiene única solución.
15. Si el producto de la pendiente de dos rectas es cero, no existe solución en el sistema de ecuaciones.

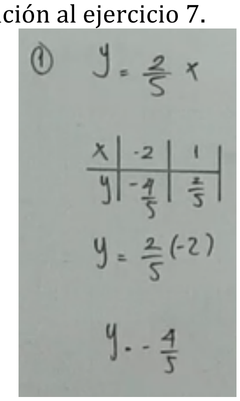
Fuente: Registro fotográfico del taller.

Antes de finalizar la sesión se desarrollaron los tres primeros puntos del taller. Para los dos primeros, el docente pasa a los estudiantes al tablero [CD5 y CD6] y él realiza el tercero [CD7]. El estudiante deja como tarea culminar los ejercicios del 1 al 10.

La segunda sesión inicia con la aclaración de dudas del taller anterior, los estudiantes mostraron dificultades para graficar las rectas del ejercicio 7 con el método que se les enseño. Esto sucede porque la estrategia vista en la clase anterior busca los puntos de corte de la recta con el eje x e y respectivamente, cuando se replican estos pasos en las ecuaciones del ejercicio 7, al ser rectas de la forma $\boldsymbol{y = mx}$, los cortes coinciden en el punto (0, 0) y no se obtiene otro para graficar la recta.

Ante esto, el profesor les indica otra estrategia para hacerlo, a partir de una *relación funcional*. Esta consiste en construir una tabla tabular y dar dos valores distintos a ´x´ para remplazarlos en las ecuaciones [CD9], ver *figura 4*. Sin embargo, el docente no descarta la primera estrategia, esto se presume porque, en el ejercicio 10, él sugiere a los estudiantes usar una tabla de valores para graficar la primera recta y utilizar el método de la clase anterior para graficar la segunda [CD10].

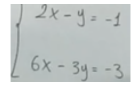
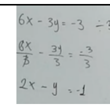
Figura 4. Resolución al ejercicio 7.

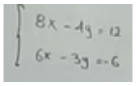
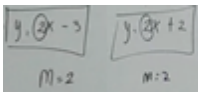


Fuente: Registro fotográfico.

Después de terminar de contestar las dudas de los estudiantes, el profesor les realiza una pregunta *¿cómo identificar el tipo de solución sólo con la expresión algebraica?* [*Intervención 35, clase 2, Profesor 1*] esta pregunta va dirigida a que los estudiantes puedan identificar el comportamiento de las rectas sólo analizando la expresión algebraica. Sin embargo, como se muestra en la *tabla 4*, si bien algunos estudiantes daban sus aportes es el docente quien termina dando respuesta a esta tarea.

Tabla 4. Configuraciones didácticas 11 a la 13.

Configuración didáctica CD11
Proposición pretendida: Si la primera ecuación es equivalente a la segunda, entonces el sistema tiene soluciones infinitas.
Explicación: Utiliza ejemplos particulares a partir del lenguaje algebraico.  
Expresión: “Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución infinita si se puede simplificar” [Intervenciones del profesor 64 y 66, clase 1].

Configuración didáctica CD12
Proposición pretendida: Si dos rectas tienen pendientes iguales al llevarlas de la forma $y = mx + b$, entonces el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.
Explicación: Utiliza ejemplos particulares:  
Expresión: "Bueno, pues resulta que cuando las pendientes son iguales, las rectas son paralelas y ya sabemos que entonces que es un sistema de ecuaciones cuando las pendientes son iguales, las rectas quedan en la gráfica paralelas, y por lo tanto, no tienen solución" [Intervención 78, Profesor 1, clase 2].
Configuración didáctica CD13
Proposición pretendida: Si las pendientes de dos rectas tienen signo contrario entonces el sistema de ecuaciones tiene una solución única
Explicación: Utiliza una representación gráfica que representa una generalidad. Hay una conversión del lenguaje: interpretación del lenguaje algebraico al lenguaje gráfico. 
Expresión: "Cuando las pendientes sean de signos contrarios, yo tengo la certeza de que se van a cruzar en algún punto. Pero ahora pregunto, será suficiente, siempre que las pendientes sean de signos contrarios ¿siempre se van a encontrar?" [Intervención 86, Profesor 1, clase 2]

Fuente: Elaboración propia.

Después de mostrar la última conjetura [CD13], el docente continua con el desarrollo de la parte 2 del taller (ejercicios del 12 al 15, ver *figura 3*). En estos ejercicios, los estudiantes deben determinar el valor de verdad de las proposiciones matemáticas propuestas. Se utiliza la misma metodología de socialización de la actividad anterior, en la *tabla 5* organiza esta información.

Tabla 5. Configuraciones didácticas 14 a la 15.

Configuración didáctica CD14
Ejercicio propuesto: 11. Si la pendiente entre dos rectas es igual, se puede afirmar que el sistema de ecuaciones no tiene solución**.**
Intervención: "Verdadero, porque si tienen la misma pendiente van a ser paralelas no va a tener solución" [Intervención 97 (clase 2), estudiante 15]
Configuración didáctica CD15
Ejercicio propuesto: 12. Si el producto de las pendientes de dos retas es -1, se puede afirmar que las rectas no se cortan en ningún punto.
Intervención: "…resulta que hay una definición de rectas perpendiculares, que dice, que una recta es perpendicular a otra, cuando el producto de sus dos pendientes es igual a menos uno, siempre es así, dos rectas son paralelas cuando las pendientes son iguales y perpendiculares, cuando…(Dibuja un par de rectas perpendiculares en el tablero)…"Bueno, hay una definición que dice, que si yo tomo la pendiente de esta recta y la multiplico por la pendiente de esta recta (dice el profesor señalando primero la recta que forma el eje x y después el eje y) el resultado de este producto debe dar menos uno porque ambas rectas son perpendiculares, es decir, que las rectas son perpendiculares, si el producto es menos uno…"[Intervención 102 (clase 2), Profesor 1].
Configuración didáctica CD16
Ejercicio propuesto: 13. Si dos rectas tienen dos puntos en común, quiere decir que tienen infinitos puntos de corte.
Intervención: "… (El profesor dibuja en el tablero dos puntos encima de una recta que ya está dibujada) …; ya miramos que tenemos una recta con estos dos puntos (señala la gráfica del tablero) y se supone que la otra va a tener esos dos mismos puntos y al trazarla que pasa" [Intervención 106 (Clase 2), profesor 1] "Queda encima" [Intervención 107 (Clase 2), Estudiante 26] "Entonces, si una queda encima de la otra ¿tienen infinitos puntos de corte? (Si, contestan en coro los estudiantes)" [Intervención 108 (Clase 2), profesor].
Configuración didáctica CD17
Ejercicio propuesto: 14. Si la pendiente de una recta es positiva y la pendiente de otra recta es negativa, el sistema de ecuaciones que se genera con ellas tiene única solución.
Intervención:

"Verdadero, porque cuando estábamos viendo las gráficas de antes, para ser solución única tenía que tener por lo menos una característica que una pendiente fuera positiva y otra negativa." [Intervención 113 (clase 2) Estudiante 23]
Configuración didáctica CD18
Ejercicio propuesto: 15. Si el producto de la pendiente de dos rectas es cero, no existe solución en el sistema de ecuaciones.
Intervención: "(Después de mostrar un ejemplo de la situación a los estudiantes) Falso, porque si una de las dos pendientes es cero, el sistema tiene solución y ya. ¿Si entendieron como se comprueba eso? (los estudiantes asienten en modo de confirmación). Y ese es un argumento comprobable y válido. Les repito, es falso, porque al graficar una función con pendiente cero y una función con pendiente diferente de cero, da un sistema con solución única…"[Intervención 124 (clase 2, Profesor)]

Fuente: Elaboración propia.

Al terminar esta actividad el profesor indaga con sus estudiantes acerca de lo que se ha trabajado hasta el momento [CD19]. Finalmente, establece que al estudiar las gráficas de las rectas ya han trabajado un primer método de solución de los sistemas de ecuaciones, el *método gráfico* (no se habia institucionalizado hasta el momento). Asimismo, manifiesta que este método es pertinente para identificar el tipo de solución que puede tener un sistema de ecuaciones, pero, que, si este es de solución única, el método gráfico puede fallar en exactitud si la solución no son números enteros [CD20]. Bajo esta premisa destaca la importancia de utilizar otros métodos que permitan obtener soluciones exactas, culminando la clase con la explicación de los pasos para el método de sustitución. Al finalizar la clase, el profesor les pide a los estudiantes resolver un sistema de ecuaciones replicando los pasos de dicho método, [CD21].

4.2. Contextualización de clases e identificación de prácticas matemáticas del Profesor 2

El profesor 2, para la grabación de las clases, seleccionó un grado noveno de básica secundaria perteneciente a la jornada de la tarde (12:15 pm a 6:30 pm). El grupo consta de 39 estudiantes (24 hombres y 15 mujeres). En el transcurso de las sesiones, los estudiantes mostraron una actitud apática hacia los temas trabajados en la asignatura y se observaron algunas dificultades disciplinarias que impidieron un ambiente óptimo para su correcto desarrollo. En este caso el *profesor 2* abarco de manera superficial los tipos de solución de los sistemas, pasando directamente a métodos algebraicos y no abordo el método gráfico.

Tabla 6. Distribución de las sesiones y configuraciones didácticas del profesor 2.

Sesión	***Descripción***	***Configuraciones didácticas***
1	Definición de sistemas de ecuaciones 2 x 2. Diferentes tipos de soluciones en un sistema de ecuaciones 2 x 2. Método de igualación.	CD1 A CD6

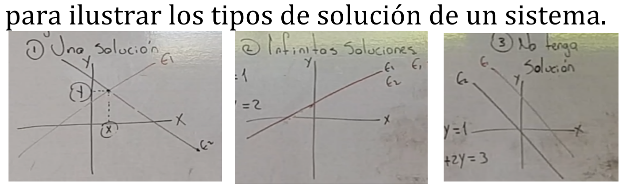
Fuente: Elaboración propia.

La sesión inicia cuando el profesor presenta la definición del sistema de ecuaciones lineales como: "*Dos ecuaciones con dos incógnitas*" a partir de esto, escribe en el tablero la forma general de un sistema de ecuaciones 2 x 2, acompañado de un ejemplo particular [CD1]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ax_1 + by_1 = c} \\ \boldsymbol{ax_2 + by_2 = c} \end{aligned} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{3x + 3y = 6} \\ \boldsymbol{-4x + 2y = 1} \end{cases}$$

Después, el profesor les dice a los estudiantes que un sistema de ecuaciones puede tener tres tipos de solución y realiza un esquema en el tablero para cada una de ellas. [CD2].

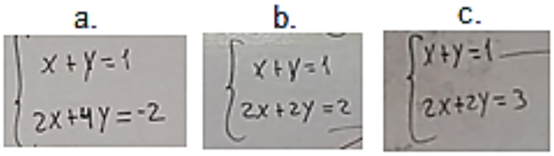
Figura 4. Tres gráficos dibujados por el profesor para ilustrar los tipos de solución de un sistema.



Fuente: Foto extraída de las videograbaciones de clase.

Para complementar la idea anterior, escribe al lado de cada una de estas representaciones gráficas un ejemplo particular de un sistema de ecuación que tenga ese tipo de solución.

Figura 5. Tres ejemplos para ilustrar los tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones 2 x 2.



Fuente: Foto extraida de las videograbaciones de clase.

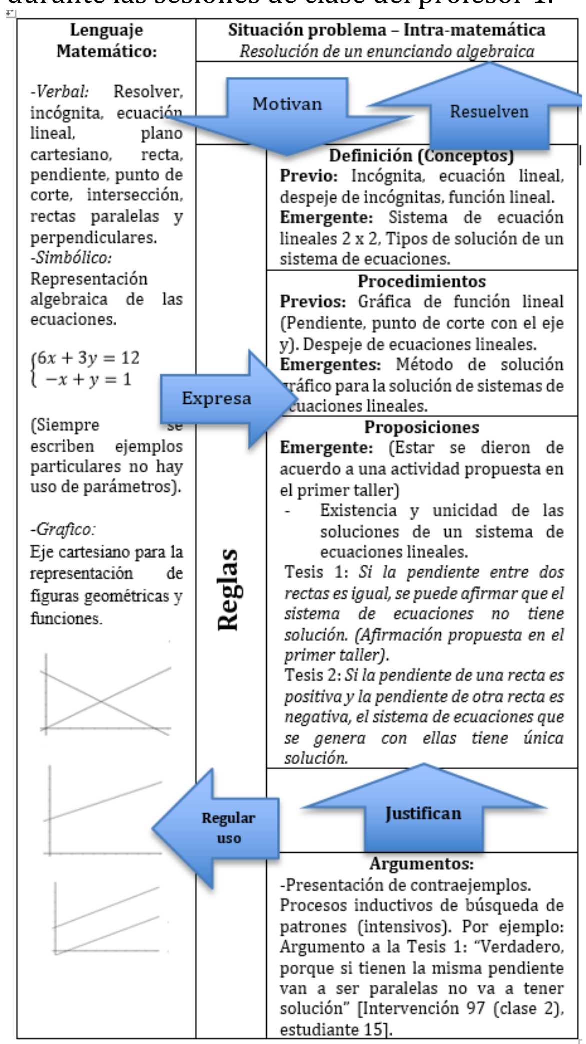
Para los sistemas de ecuaciones lineales que tienen solución el profesor escribió el ejemplo mostrado en la *figura 5a*. En este sólo indicó que tenía solución y que más adelante les iba a mostrar cómo se encontraba. Para los sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones, el profesor 2 dijo a sus estudiantes "*Fíjense en el sistema de ecuación en donde tiene infinitas soluciones, en ese la segunda ecuación es el doble de la primera, como si en la primera se multiplicaran por dos y la segunda fuera el resultado. Prácticamente es la misma ecuación. ¿Listo?" [Intervención 37, Clase 2, Profesor 2].* El profesor no dio ningún argumento a sus estudiantes sobre el ejemplo de la *figura 5c* que representaba cuando un sistema no tiene solución [CD3]. Pasado los ejemplos, el profesor paso inmediatamente a explicar el método de igualación

4.3. Descripción de objetos y procesos matemáticos

Al estudiar *los sistemas de ecuaciones lineales* 2 x 2 se observa el uso de lenguajes verbales y simbólicos. De acuerdo a Pochulu y Font (2011) estos lenguajes son la parte ostentiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si ciertas prácticas de aula son pertinentes o no. Esto implica que cuando el docente ejecuta una práctica matemática pone en funcionamiento un conjunto conformado por situaciones problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos elementos se articulan en *configuraciones epistémicas* (*figura 6 y 7*).

La importancia de estructurar los elementos presentes en la práctica y organizarlos en una configuración epistémica permite destacar ciertos aspectos de especial interés al analizar una clase.

Figura 6. Configuración epistémica observada durante las sesiones de clase del profesor 1.

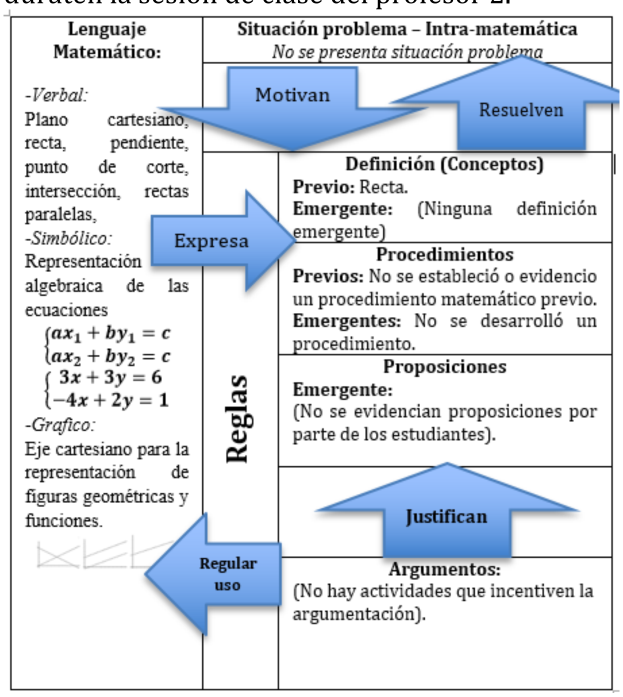


Fuente: Elaboración propia.

En el caso de las sesiones de trabajo del profesor 1, los problemas para iniciar el tema pertenecen a contextos intramatemáticos. El profesor se valio de los temas trabajados previamente (ecuación de la recta) para justificar un procedimiento mecánico: *encontrar dos puntos de corte de la recta* (procedimeinto visto en la *figura 2*). Sin embargo, éste no fue suficiente porque tuvo dificultad con uno de los ejercicios propuestos más adelante, ésta es descrita más a detalle en el *apartado 4.3.*

Asimismo, en el transcurso de la clase (en la socialización de los puntos 11 al 15 del taller) los estudiantes debían validar o negar una proposición. Es importante resaltar que este tipo de actividades tienen el potencial de ampliar las *procedimientos, proposiciones y argumentos* abarcados en el proceso de enseñanza, sin embargo, como se explica más adelante la dinámica interaccional de la clase no permitió un mejor desarrollo de estos.

Figura 7. Configuración epistémica observada duraten la sesión de clase del profesor 2.



Fuente: Elaboración propia.

El profesor 2 no presento una situación problema a los estudiantes, la introducción al concepto consistió en un discurso expositivo haciendo uso de la representación simbólica y gráfica. Si bien el docente menciona como concepto previo la recta, lo hace para justificar la construcción de los gráficos en el tablero y mostrar los tipos de solución. No hubo actividades que permitieran explorar este conocimiento previo ni una que desembocara en definiciones, procedimientos y proposiciones nuevas. En consecuencia, no existió espacios durante la clase y/o actividades para que los estudiantes argumentarán. El hecho de no institucionalizar esta construcción gráfica implica el desconocimiento por parte de los estudiantes al método de solución gráfico de los sistemas de ecuaciones. Se observó una premura por iniciar con los métodos algebraicos.

En relación a los *procesos matemáticos,* de modo general, se pueden observar:

Profesor 1:

- *Representación-Significación:* En el transcurso de la clase el profesor 1 busco trabajar en conjunto la representación gráfica y simbólica que permitiera evocar características del objeto matemático, que para este caso se apoyó de la representación gráfica funcional de las ecuaciones para estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2.
- *Particularización-Generalización:* En la primera sesión de clase se puede ver que el profesor busca que a partir de ejemplos particulares se caracterice los tipos de solución de un sistema de ecuación lineal 2 x 2. En la segunda sesión, el profesor buscó ir más allá, lograr que los estudiantes infirieran en relación al tipo de solución de un sistema de ecuaciones desde su representación simbólica, sin necesidad de realizar la conversión a la representación gráfica [CD11-CD18]. Sin embargo, no hubo una participación muy activa, solo en CD14 y CD17 los estudiantes utilizaron una conjetura trabajada previamente.
- *Institucionalización-personalización:* Se busca *institucionaliar* el método gráfico a partir de la *algoritmización* (mecanización) de una estrategia que consiste en encontrar los puntos de corte de la recta. Sin embargo, se institucionalizo una segunda estrategia para las rectas de la forma $y = mx$, a través de la construcción de una tabla de valores.

Profesor 2:

- *Institucionalización-Personalización:* El profesor busca institucionalizar los tipos de solución a a partir de la representación gráfica. Sin embargo, lo hizo de manera expositiva sin ninguna actividad que permitiera a los estudiantes explorar este objeto matemático.

4.3. Análisis de interacciones didácticas

En relación a los tipos de interacciones didácticas que ocurren en el proceso de enseñanza, se centra la atención en los *conflictos semióticos*. Estos se entienden como cualquier diferencia o desacuerdo de dos sujetos frente al significado atribuido a una expresión. Pochulu y Font (2011), clasifica los conflictos en tres tipos:

- *Conflicto semiótico (epistémico):* Diferencia producida entre el sujeto y los significados institucionales.
- *Conflicto semiótico (cognitivo):* Diferencia entre prácticas que se crean en el significado personal de un mismo sujeto.
- *Conflicto semiótico (interaccional):* Cuando existe un desacuerdo que se da entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos personas diferentes en interacción comunicativa. Estos desacuerdos se pueden dar entre alumnos o entre alumno y profesor.

A continuación, se presentan conflictos semióticos identificados en las sesiones de clase del *profesor 1*:

Conflicto semiótico (epistémico) 1: En varias ocasiones el profesor afirma que el método gráfico no es útil cuando no se puede encontrar el valor numérico de las coordenadas de intercepción, inclusive, afirma que el método sólo es útil cuando tiene soluciones enteras:

> Esa es la dificultad de este método. Solo se aplica cuando las soluciones son números enteros. Ya cuando son otro tipo de solución acudimos a otro método, pero igual es bueno conocerlo. ¿listo, claro hasta ahí? [Intervención 43, Clase 1, Profesor 1]
>
> Si, que cuando la solución es infinita, yo puedo decir que la solución es infinita y listo, no tiene pierde. Que cuando no tiene solución, también solo puede decir que no hay ningún inconveniente. El problema es cuando la solución es única y me da un sistema de ecuaciones que no se puede determinar el signo, por ejemplo, vamos a hacer una recta que va a pasar por acá (traza la recta en la gráfica y traza otra recta igual a la segunda ecuación del sistema anterior) y el punto de corte es este (señala el punto de corte entre las dos rectas). Bueno, entonces si el punto de corte es ese, ¿cuánto vale "x" y cuánto vale "y"?, ¿Puedo decirlo con certeza? (No, contestan los estudiantes) No, entonces, para estos casos, que gráficamente yo no puedo ver la solución ¿Qué hago? Recurrir a otro método. [Intervenciones 137 y 139, Clase 2, Profesor 1]

Esto evidencia una visión sesgada del método gráfico que se utiliza sólo para dar una representación a los tipos de solución de los sistemas de ecuaciones, el método se resume a una serie de pasos para encontrar el punto de intersección entre las rectas (en el caso de que tenga solución), y las coordenadas de este punto se asocia a la solución del sistema. De acuerdo a Lasa (2015), la resolución gráfica implica más que eso, involucra que los valores desconocidos identificados hasta ese momento como incógnitas pasen a una dimensión más amplia, la de variables tanto independientes 'x' como dependientes 'y' se traduzcan de un enunciado verbal algebraico equivalente, y se toma hacia su dimensión funcional.

$$ax + by = c \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-ax + c}{b}$$
$$cx + dy = e \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-cx + e}{d}$$

Esta nueva dimensión funcional permite que se traduzca en representación gráfica del plano cartesiano. Al cual se puede implementar métodos de solución, por ejemplo, el de igualación para encontrar las coordenadas exactas donde se encuentra la solución exacta.

$$\frac{-ax + c}{b} = \frac{-cx + e}{d}$$

Esto implica que el término "*el método gráfico solo sirve cuando la solución es entera*" no sea cierto, al contrario, un buen manejo del método gráfico, (que Lasa (2015) lo refiere como una *resolución funcional*) exige el dominio de los métodos de solución de sistemas algebraicos. Este conflicto semiótico de carácter epistémico, desemboca en el conflicto semiótico (cognitivo) expuesto a continuación.

Conflicto semiótico (cognitivo) 1: En relación con el *conflicto semiótico (epistémico) 1*, las expresiones utilizadas por el docente en relación a "*el método gráfico sólo sirve cuando la solución es entera*" desvirtúa el potencial cognitivo de este tipo de métodos de solución. Porque esto impide que los estudiantes generen conexiones con los procedimientos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo al discurso del profesor, se establece una conexión como:

El método gráfico me permite identificar cuando tiene solución, no tiene solución o hay infinitas soluciones. Sí tiene solución finita pero esta no es entera…	$\Longrightarrow$	Utilizar otros métodos algebraicos que permitan dar una solución exacta.

Estudios como los de Mora (2001), señalan que el tratamiento geométrico paralelo a los métodos algebraico proporciona herramientas en el estudiante que le permiten interpretar, de manera más natural y fácil, los tipos de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Por ejemplo, facilita la interpretación por parte del estudiante de expresiones como $0 = 0$ o $0 = 5$, cuando se estudian métodos algebraicos.

Conflicto semiótico (cognitivo) 2: En uno de los ejercicios del primer taller, los estudiantes manifestaron no poder solucionar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ y = \frac{9}{5}x \end{cases}$, por el método gráfico. [*CD9 (Clase 2), Profesor 1*]. El profesor les había enseñado la clase anterior un procedimiento que consistía en obtener dos puntos de la recta que representa la ecuación con $x = 0$ y $y = 0$ (ver un ejemplo de este método en la *figura 2*). Sin embargo, los estudiantes obtenían un solo punto en las dos ecuaciones (0,0), por lo cual, les impedía graficar la recta, tampoco identificaron que ese punto de origen era la solución del sistema de ecuaciones. El profesor optó por explicarles otra estrategia que consistía en construir una tabla de valores de dos puntos para cada una de las rectas, haciendo alusión a la *función lineal* visto en clases anteriores:

> Entonces vamos a tomar la primera ecuación que es $y = \frac{3}{2}x$, inclusive, se acuerdan que nosotros podemos graficarla de acuerdo a la pendiente, como esa pasa por el origen y contando, contando cuantos valores toma en "x" dos y en "y" tres, así se puede graficar. ¿Lo hacemos así o le damos valores en una tabla?" [Intervención 11, Clase 2, Profesor 1]

En CD9, el conflicto es potencial porque el profesor *institucionaliza* un procedimiento, en la clase anterior, que consiste en encontrar los puntos de corte de la recta con el eje 'x' y el eje 'y' para graficar las rectas y encontrar la solución del sistema de ecuaciones. Sin embargo, este método es fácil de aplicar para funciones afín, lo cual genera confusión en los estudiantes, optando por explicar otra estrategia:

Tabla 7. Estrategias de solución planteadas por el profesor 1.

Tipo de ecuación	***Estrategia***
Función afín $(y = mx + b)$	Encontrar los puntos de corte de la función ($x = 0$ y $y = 0$)
Función lineal $(y = mx)$	Realizar una tabla de valores con dos puntos de la recta. $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline x & a & B \\ \hline y & & \\ \hline \end{array}$

Fuente: Elaboración propia.

Esto puede ser un posible riesgo a la construcción del significado de función porque, el profesor, está más preocupado por enseñar una estrategia que resuelva los sistemas de ecuaciones que por la adquisición de los objetos matemáticos que intervienen, en este caso, el de función lineal y afín. Una estrategia que no es sencilla para el estudiante por el *conflicto semiotico (epistémico) explicado* anteriormente, porque implica el reconocimiento de la relación funcional entre variables.

A continuación, se presentan los conflictos semioticos identificados en la clase del profesor 2.

Conflicto semiótico (epistémico) 2: Cuando el profesor define un sistema de ecuaciones lineales, un estudiante le pregunta por los coeficientes que están en el sistema de ecuaciones [Intervención 27-28 (Clase 1, CD1, Profesor 2)]:

26	Estudiante 9	¿Puedo poner los números que yo quiera? (Lo dice cuando el profesor pasa del sistema de ecuaciones general al particular) $\boldsymbol{ax_1 + by_1 = c}$ $\boldsymbol{ax_2 + by_2 = c}$ $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 3y = 6} \\ \boldsymbol{-4x + 2y = 1} \end{cases}$
27	Profesor	No, el ejercicio te los da. Por ejemplo, este es un ejercicio de los que vamos a trabajar (señala el sistema que acaba de copiar en el tablero), el ejercicio viene planteado de esta forma y ahí sí, se resuelve… (Da por contestada la pregunta del estudiante y sigue explicando a todo el grupo) …

En este episodio de clase existen dos factores a tratar. En primer lugar, hay un error en la forma de escribir el sistema de ecuaciones de manera general, porque presumimos que los valores que deben tener los subíndices son los parámetros para establecer que estos no son iguales, ver *figura 8* . Aun así, no parece pertinente presentar de esta manera los sistemas de ecuaciones porque, exige por parte del estudiante, un *nivel alto de algebrización* en que interprete el *parámetro* como *generalizador* para distinguirlo de las variables y la generalidad de la expresión del sistema (Godino, Neto, Wilhelmi, L, Etchegegaray, & Lasa, 2015).

Figura 8. Error en la escritura del sistema de ecuaciones.

$$\begin{matrix} \boldsymbol{ax_1 + by_1 = c} \\ \boldsymbol{ax_2 + by_2 = c} \end{matrix} \quad \textbf{Debe ser} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{a_1x + b_1y = c_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y = c_2} \end{matrix}$$

Fuente: Elaboración propia.

En segundo lugar, la respuesta que da el profesor [Intervención 27], es poco pertinente porque genera una imagen de la matemática como un producto acabado, sin darle un sentido al objeto matemático. Estas situaciones pueden generar en el estudiante un conflicto en la construcción de significado de sistema de ecuaciones, variable e incógnita.

Conflicto semiótico (epistémico) 3: Cuando el profesor muestra los tres tipos de soluciones en el tablero, *ver figura 5* un estudiante no comprende cuál es la conversión entre la representación simbólica y gráfica que quiere mostrar el profesor [CD4].

39	Profesor	… ¿Qué debieron haber aprendido hasta ahorita?, el cuándo es una ecuación dos por dos, que es cuando hay dos incógnitas y dos ecuaciones. Eso fue lo primero que vimos, el identificar un sistema dos por dos. Lo otro que hemos visto, son los tres posibles resultados, cuando tienen una única solución, cuando tienen infinitas soluciones y cuando no tienen solución. Ahorita si vamos a empezar a trabajar como se solucionan.
40	Estudiante 15	Profe, lo que no sé, es como se hace para trazar la recta, usted la puede trazar como quiera o la misma ecuación le da el cómo trazarla (Se refiere a las gráficas de la *figura 5*).
41	Profesor	Hasta el momento solo son ejemplos, yo trace las rectas cómo al azar, pero mostrando las características de sus soluciones, porque son los posibles resultados que pueden encontrar.
42	Estudiante 10	Si la gráfica me queda mal, ¿afecta todo?
43	Profesor	Si, pero por ahora no vamos a graficar, vamos a hacer solución, haciéndolo matemáticamente. ¿Listos, puedo borrar?

Se está ante un conflicto semiótico potencial, pues el profesor "muestra" la representación gráfica para analizar los tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones desconociendo la interpretación que hacen los estudiantes. Además, al mencionar "*vamos a hacer solución, haciéndolo matemáticamente*", desvirtúa el estatus que tiene la representación gráfica en el objeto matemático a estudiar.

4.4. Análisis de interacciones didácticas

Los procesos de enseñanza y aprendizaje que suceden en el salón de clases como actividad social, están ajustados por normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones, etc. Estos elementos que regulan los comportamientos de los estudiantes forman lo que el EOS define como dimensión normativa de los procesos de instrucción (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009). Esta dimensión normativa se estudian desde las mismas seis dimensiones descritas en la idoneidad didáctica (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica). Si bien la dimensión normativa que se maneja en una clase de matemáticas son muy amplia, sólo se presentan las normas que pueden llegar a dar sentido a ciertos comportamientos observados en las clases.

Normas epistémicas

- El profesor es quien acepta las definiciones, teoremas y argumentaciones dadas por los estudiantes.

- El profesor es quien válida los resultados de los ejercicios propuestos en los diferentes momentos de la clase.

Normas interaccionales

Interacción docente-discente

- No hay interacción docente-discente a nivel individualizado.
- Prevalece el proceso instruccional expositivo en su mayoría de veces por parte del profesor.
- Se explicita la realización de clases expositivas y complementa con talleres que deben ser resueltos de manera individual.

Interacción entre discentes

- No existen espacios donde se facilite la interacción entre estudiantes.

Normas mediacionales

Recursos materiales

- No hay un uso de material manipulativo ni de software educativo. Los únicos recursos que se usan son los talleres en fotocopias, los cuadernos, el tablero y el marcador.
- La condición del aula también se puede considerar optima, cuenta con una buena distribución de espacio, los puestos y elementos como tablero se encuentran en buen estado.

Tiempo

- Se percibe en relación al profesor 2 que el tiempo planificado para el proceso de enseñanza del concepto no es el adecuado.

4.5. Valoración didáctica

Los cuatro primeros niveles buscan realizar una descripción y explicación de lo que sucedió en las trayectorias didácticas de los dos profesores participantes. La valoración didáctica, es el último nivel donde se busca evaluar la pertinencia de estas prácticas, esto se hace a través de seis idoneidades: *epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica*. A continuación, se describe cada una de ellas:

Idoneidad epistémica: En cuanto a los *errores* se evidencia que el *profesor 1* limita el método de solución algebraico como objeto matemático que sólo es útil para estudiar sistemas de ecuaciones sin solución o con soluciones infinitas (descrito en el *conflicto semiótico (epistémico) 1*). Por otro lado, el *profesor 2* presento una imprecisión en la generalización de un sistema de ecuación lineal (*conflicto semiótico (epistémico) 2*).

En cuanto a la *precisión* al tratar el objeto matemático, en relación al profesor 1 de las clases se evidencia que se trabajó únicamente ejercicios intramatemáticos a través de enunciados algebraicos. El direccionamiento de las actividades estuvo enfocado a la *institucionalización* del método gráfico a través de la aplicación de una serie de pasos sin justificar las reglas que se dan a conocer y si bien el docente busca articularlo con el concepto de recta trabajado previamente, esto lo hace una articulación poco significativa del objeto matemático puesto en juego. Básicamente, a pesar de que la intención es explorar y analizar los tipos de solución a partir de la representación gráfica, los procedimientos que emergen de la clase básicamente se enfocan en procesos de *algoritmización*. Esto se evidencia en el *conflicto semiótico (epistémico) 1*, en el que se prioriza el enseñar una estrategia sin tener en cuenta los *conocimientos previos* y *dominios conceptuales* que le conllevan al estudiante, ver *tabla 8*.

Tabla 8. Estrategias propuestas por el profesor 1.

Estrategia	Manejo de la letra	Cuando utilizar
Para obtener un primer punto, remplazar $x = 0$ y después despejar la incógnita ´y´ de la ecuación resultante. Para obtener el segundo punto, remplazar $y = 0$ y después despejar la incógnita ´x´ de la ecuación resultante.	Se forman dos ecuaciones de primer grado que se deben despejar para obtener una pareja ordenada.	Para ecuaciones de la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$
Realizar una tabla de valores y dar dos valores distintos a “x” para formar dos parejas ordenadas.	La ecuación pasa tener una relación funcional en la que las letras x e y, son variables.	Para ecuaciones de la forma $\boldsymbol{y = mx}$

Fuente: Elaboración propia.

No existió *precisión* en los procedimientos para enseñar el método de solución gráfico, esto se puede evidenciar en los *conflictos semióticos (epistémicos) 2 y 3*, descritos en el apartado 4.3. Estos evidencian una enseñanza de los conceptos muy improvisada, premeditada, e imprecisa que llegan a evidenciar errores al momento de formalizarlos matemáticamente. Asimismo, no se evidencio *variedad en la riqueza de procesos* porque no se propuso actividades para los estudiantes.

En cuanto a la *representatividad,* el profesor 1, en el proceso de instrucción, exploró los tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales a través de su representación gráfica y simbólica, y realizo procesos de traducción entre estos tipos de representación. Por ejemplo, indagando sobre posibles conjeturas de cómo identificar que un sistema de ecuaciones tiene o no tiene solución observando características de su representación, simbólica (cuando al hacer una transformación a la expresión algebraica se forman dos expresiones equivalentes), o despejando las ecuaciones para observar que las pendientes son iguales [CD11 a CD13]. A pesar de que esto pudo dar oportunidad a establecer una *riqueza de procesos*, en cuanto a que planteo situaciones para identificar regularidades y actividades donde el estudiante debía argumentar la validez de una afirmación, los espacios y dinámicas de participación establecidas en la clase impidió que fueran más provechosas (inconvenientes en la *idoneidad interaccional*).

En cuanto al profesor 2, no existe una *representatividad* del objeto matemático a estudiar, la trayectoria didáctica se centró en explorar los sistemas de ecuaciones lineales desde una representación simbólica. Si bien el docente utilizó la representación gráfica para describir los tipos de solución de un sistema de ecuación [CD 2], se mostró de manera superficial y poco explorada o experimentada por los estudiantes. Se presume el docente asumió como un conocimiento previo adquirido el graficar funcionales lineales, pero no identifica la asociación que tiene que hacer el estudiante a esa ecuación con el tema previo. Además, como se mencionó en el *apartado 4.2*. se evidencia que el profesor 2 se apresura hacia la faceta procedimental.

Las dificultades evidenciadas en la *precisión, errores riqueza de procesos* y *representatividad* del objeto matemático, permite establecer que existe una baja idoneidad epistémica en la trayectoria didáctica dada por el profesor 2.

Interacción cognitiva: En relación a los *conceptos previos*, los dos profesores evidencian la ecuación de la recta como principal concepto previo para comenzar a estudiar los *sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2.* Sin embargo, lo asumieron de manera diferente. El profesor 1 abarco este concepto previo para que los estudiantes explorarán los tipos de solución a través de la construcción de rectas. Mientras que el profesor 2 asumió que los estudiantes lo conocían y que comprenderían la representación gráfica mostrada para diferenciar los tipos de solución. Sin embargo, Alcocer (2007) señala que abordar este método así puede generar una dificultad *los estudiantes establecen la solución del sistema de ecuaciones lineales como puntos de intersección de las rectas del sistema*, si bien esto parecería correcto, cuando se les presenta tres rectas dibujadas en un plano interceptándose en un triángulo, lo estudiantes pueden establecer que el sistema tiene tres soluciones. Esto tiene una implicación importante, no basta "mostrar" los procedimientos de solución de sistema gráfico sino se generan actividades de traducción de éste sistema al algebraico.

En cuanto a los *aprendizajes,* si se evalúa el alcance de los significados pretendidos, se podría decir que sí, porque los estudiantes aprendieron lo que, presumimos, el profesor 1 pretendía enseñar, el *método de solución gráfico* y a partir de su construcción establecer el tipo de solución. Sin embargo, como se explicó en la *idoneidad epistémica* el proceso se redujo a un proceso de mecanización, sin saber por qué, lo que conlleva a que los estudiantes podrían tener dificultades como las que menciona Alcocer (2007). Como establece Font (artículo de la clase funcional) una baja idoneidad epistémica desemboca en que los contenidos enseñados estén distanciados de lo que saben los estudiantes. En el caso del *profesor 2* no se puede evidenciar *aprendizajes* porque no se vislumbró un proceso evaluativo que permitiera percibir que tanto estaban aprendiendo los estudiantes.

Por otro lado, no se observan *adaptaciones curriculares a diferencias individuales,* en los dos profesores se percibe una preocupación por cumplir con lo planteado en plan de aula, abarcar todos los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones.

Los conflictos epistémicos expuestos en el apartado 4.3 no fueron resueltos, sumado a las dificultades expuestas en cuanto al *manejo de los conceptos previos, aprendizajes* y *adaptaciones curriculares* permite considerar que los procesos de instrucción de los profesores participantes son bajos.

Idoneidad Interaccional: En las clases se observa que existe una enseñanza que se realiza por imitación y asociación. Esto implica, que el aprendizaje se produce por la observación del docente considerado el "experto", mientras el alumno tiene un papel de "receptor" del proceso y sigue las indicaciones. Es de destacar que el *profesor 1* genera espacios de participación, con normas muy claras y ordenada, pero existen algunos aspectos que impiden sea un buen proceso de comunicación *docente-discente*. La gran mayoría de las preguntas propuestas por el docente se centraban en validar lo que el profesor previamente tenia diseñado, por lo tanto, el argumento sólo es aceptado o rechazado para continuar con un discurso previo. Un ejemplo de esto se da en [CD4, Intervención 79-102, Clase 1, Profesor 1].

79	Profesor	Bueno. Vamos a ver todos como nos queda la gráfica. (Dibuja el plano en el tablero). Listo, ahora pase usted al tablero y ubíqueme los puntos de la primera ecuación (dice señalando a un estudiante. El estudiante se levanta de su puesto y se dirige al tablero. Coge el marcador e indica donde quedan los puntos en la gráfica). Listo, bien y ahora los puntos de la segunda ecuación ¿dónde quedan?
80	Estudiante 1	Ahí mismo.
81	Profesor	Sí señor, ahí mismo, porque siguen siendo los mismos puntos. Entonces ¿Qué pasa? (el profesor coge la regla y traza la recta uniendo los puntos). Al trazar la recta, queda una sobre la otra. Ahora la pregunta es ¿Qué tipo de solución se presenta en este sistema?
82	Estudiantes	Infinita (contestan en coro).
83	Profesor	¿Por qué?
84	Estudiante 2	Porque las dos rectas siempre van a ir por la misma línea.
85	Profesor	Esa no es la respuesta. ¿Alguien tiene algo diferente que decir? ¿no? Entonces vamos a analizar. Primero, había solución única cuando se interceptaban en un punto, luego había no tiene solución cuando no se interceptaban en ningún punto y acá hay solución infinita (señala la gráfica del tablero) ¿Por qué? ¿En cuántos puntos se están interceptando estas rectas?
86	Estudiante 2	Infinitos.
87	Profesor	Exacto, porque yo puedo ubicar tantos puntos como pueda porque se extiende, porque esta una sobre la otra, por lo tanto, es una solución infinita.

En la intervención anterior, se observa que el profesor rechaza el aporte de los estudiantes 82 y 84, y al no recibir respuesta simplemente explica de nuevo hasta que en la intervención 86, el estudiante dice la respuesta correcta. Por otro lado, cuando el profesor planteo la tarea a los estudiantes de *¿cómo identificar el tipo de solución sólo con la expresión algebraica? [Intervención 35, clase 2, Profesor 1]*, si bien tenía el potencial de permitir procesos matemáticos como el de conjeturar y/o argumentar, el profesor no dio el tiempo u organizo el espacio para que los estudiantes contestaran a la pregunta, siendo el mismo quien "mostro" las regularidades.

En cuanto al profesor 2, no se puede evidenciar este aspecto porque el docente no dio espacios y/o actividades que observará la manera de trabajar de los estudiantes.

En resumen, la idoneidad interaccional es baja tanto para el profesor 1 como para el profesor 2. En el caso del profesor 1 las interacciones se enfocaron en preguntas del docente en las cuales el estudiante debe dar respuestas cerradas y específicas. Asimismo, se proponen actividades que no permiten *autonomía* en su trabajo ni la discusión de ideas entre estudiantes. En el caso del profesor 2, no hubo un espacio de interacción genuino fuera de hacer preguntas sobre lo que explicaba en clase y no se evidencio espacios de trabajo propios del estudiante.

Idoneidad mediacional: Respecto a los *recursos materiales*, tanto el *profesor 1* como el *profesor 2* no hicieron uso de recursos didácticos ni softwares educativo que apoyarán el proceso. Al no existir algún tipo de recursos de consulta como libro de texto guía este restringe a los apuntes de los estudiantes como único medio de consulta. En relación a las *condiciones de aula* se pueden considerar como pertinentes, con una distribución correcta de los estudiantes, con puestos y tablero en buen estado.

En relación al *tiempo*, una dificultad percibida a nivel institucional es la constante pérdida de clase, que, por dinámicas de la institución, no se recupera. Por ejemplo, el bimestre en el cual se realizó la grabación de las clases. Para el caso del profesor 1 se pudo cumplir con el 81% de las clases programadas y el profesor 2 un 80%. Esto podría explicar la premura del profesor 2 en la clase al abarcar el método gráfico.

Idoneidad afectiva: En relación a los *intereses y necesidades* no hay evidencia en ninguna de las sesiones de clase de los profesores, por fomentar la motivación, no se plantearon situaciones problemas reales ni cotidianos. El que la clase este dominada por unos principios donde el docente define los conceptos, propone algunos ejemplos, los resuelve a través de una clase magistral y no emplean situaciones problema que le den sentido a los conceptos, desemboca en que los estudiantes construyan un factor de *emociones* centrada en el rechazo y temor hacia las matemáticas por reflejarse en una imagen compleja y de lejano alcance. Lo anterior, implica una baja idoneidad afectiva para los procesos de instrucción de ambos profesores.

Idoneidad ecológica: En relación a los Estándares Curriculares, dentro de sus componentes esta *Identificar los diferentes tipos de métodos de resolución de un sistema de ecuaciones.* En cuanto al plan de estudios de la institución acorde a los *Derechos Básicos de Aprendizaje,* señala que, el estudiante debe estar en la capacidad de *Plantear sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y resolverlos utilizando diferentes estrategias. Además, de reconocer cuándo un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.*

En el caso del *profesor 1*, las dos clases analizadas buscaron estudiar el *método gráfico* para explorar los tipos de solución de los sistemas de ecuaciones esto implica que de manera parcial busca alcanzar el *DBA*. Sin embargo, como se menciona en la *idoneidad cognitiva*, esta exploración de los tipos de solución estuvo muy dirigida porque el profesor encasillo el procedimiento de graficar a la mera ejecución de reglas o pasos, sin una concepción de lo que se está haciendo, una prueba de ello se observa en la sesión dos cuando los estudiantes manifiestan no poder graficar las rectas en el sistema $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} \\ \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x} \end{cases}$, porque al implementar la estrategia que el profesor les enseño (encontrar los puntos de corte con el eje x e y de la recta) los estudiantes obtienen el punto (0,0), no se percatan de que este es la solución del sistema. El profesor termino estableciendo otra estrategia para construir la gráfica. Los *Estándares de Competencias de Matemáticas,* señalan que el *conocimiento procedimiental* debe ir más allá de ejecutar una serie de pasos, el estudiante debe estar en la capacidad de elaborar, comparar y ejercitar algoritmos, pero además debe argumentar sobre ellos y permitir evaluar si es correcto no el resultado obtenido. Esto implica una baja idoneidad ecológica.

En relación al *profesor 2* se considera una baja idoneidad ecológica porque el profesor evidencia un afán por institucionalizar los métodos algebraicos, “muestra” los tipos de solución sin buscar un *significado personal* en los estudiantes, no hubo discusión sobre los tipos de solución o un proceso de construcción propio de las gráficas y del porqué estos pasos funcionan, impidiendo construir en los estudiantes herramienta que le permita reconocer los tipos de solución en un sistema que es lo que busca parcialmente el *DBA*. Esto implica una baja idoneidad ecológica.

En resumen, de acuerdo a lo expuesto anteriormente, el proceso de instrucción seguido por el profesor 1 y 2 son de una baja idoneidad didáctica.

4.6. Entrevista posterior

Después de realizar la grabación de clase, los profesores participaron en una reunión en la que observaban parte de las clases descritas en el artículo, esto permitió profundizar en algunos análisis de la valoración didáctica. En una parte de la entrevista el investigador indagó sobre si era necesario abarbar todos los métodos de solución o se podría hacer de manera diferente. Las reflexiones giraron en torno a la pertinencia del uso del tipo de representación gráfico. Dentro de estas reflexiones se puede corroborar priorización del profesor 2 por los métodos algebraicos, desvirtuando la gráfica por ser inexacto al momento de ser construido por los estudiantes.

92	P2	Yo creo que se puede. Por ejemplo, yo en este caso no aborde el gráfico, pues porque yo pienso que el objetivo de los métodos es buscar la solución a un sistema, sí. Y por experiencia me he dado cuenta que el método gráfico, por un errorcito que usted cometa, que no pase bien por el punto, si… al extender, obviamente, es ángulo que está desviando (se refiere a la inclinación de la recta). Y los resultados… Es muy difícil que el muchacho le dé el resultado exacto.
93	P1	Pero fíjese PROFESOR 2, perdón lo interrumpo, que esa clase que estábamos viendo (se refiere a la clase 2 del Profesor 1) donde se acaba el método gráfico, les pregunto ¿Cuál es la dificultad que ustedes encuentran en este método? Inclusive hicimos un ejemplo, no recuerdo muy bien, hicimos un ejercicio dónde la solución no era entera. Ahí es donde ellos…bueno lo que yo buscaba era que identificarán que dijeran que el método sólo funciona para que cuando se identifica la solución que se cruzan en un punto donde la coordenada es un número entero, pero entonces ahora, hay uno métodos diferentes que son los que nos permiten obtener cualquier tipo de solución sin la necesidad de que tengamos que graficar.
94	P2	No, y aun así, cuando es entero a veces no les da, el chico…
95	P1	Se les dificulta hacer eso.
96	P2	Se les desvía tantico y ya no les va a dar el resultado.
97	P1	Pero si requiere …(precisión)
98	In	Bueno, yo preguntaría lo siguiente, respecto a lo que estamos manejando que es sistema de ecuaciones ¿Creen pertinente el método gráfico o no lo creen pertinente?
99	P1	No, yo si lo considero pertinente.
100	In	Tú me dices que no es pertinente por la inexactitud de las soluciones (Se refiere al PROFESOR 2).
101	P2	Sí, yo por eso no lo aborde .
102	P1	Yo si lo considero importante porque el método gráfico me da la visión al muchacho de los tipos de solución, y el sistema de ecuaciones hay que entender que tienen tres tipos de soluciones: hay una solución única, solución infinita. Y aparte, me da como la introducción a los demás, usted dice a sistemas de ecuaciones que se pueden solucionar por el método gráfico, teniendo… hay que tener una rigurosidad en su gráfica, pero lo tiene. Porque inclusive cuando no les da, lo estudiantes buscan la forma de trazar bien su grafica para que les dé. Cuando ellos ven que la solución del sistema de ecuaciones no es visual, es decir, que ellos no pueden ver, entonces dicen “bueno aquí qué paso” entonces busquemos otra alternativa matemática que me permite generar (solucionar el sistema) y ahí es donde le doy entrada a los demás métodos, bueno lo hago así, de esa manera. Además, la construcción gráfica tiene muchas cosas, porque la construcción gráfica la mirar casi en todas las asignaturas

El profesor 1 argumenta que los estudiantes pueden tener dificultades al mimento de graficarlo, pero no es exucsa para no enseñarlo y resalta la característica de visualizar los tipos de solución [Intervención 102]. Sin embargo, el profesor 1 presiste con el *conflicto semiotico (epistémico) 1*. (Descrito en el apartado 4.3), en el que observa una visión sesgada de la resolución funcional. Esto corrobora lo concluido en el análisis didáctico, el profesor 1 busca trabajar la representación gráfica pero no ve como posiblidad complementarla con los métodos algebraicos, lo que imposibilita destacar el verdadero potencial de este tipo de representación.

5. Discusión

Los criterios de idoneidad permiten hacer una evaluación formativa y dar una radiografía detallada sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje, que permite identificar factores que orientan cómo se deben hacer las cosas en una futura intervención. La aplicación de estos criterios de idoneidad didáctica permitió extraer las siguientes características en las prácticas de aula de los docentes:

- Se evidencian prácticas de aula poco pertinentes para abordar el método gráfico. Esto porque no hay una planificación de las exigencias conceptuales del estudiante al trabajar este método.
- Existe una priorización por los métodos de solución algebraico, el método gráfico sólo es utilizado para caracterizar los tipos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2.
- Se observó en las trayectorias una premura por iniciar los métodos de solución algebraico, y se observó en el estudio de clases posteriores que estos métodos se estudiaron sólo con sistemas de ecuaciones con solución única.
- Los conceptos, los ejercicios desarrollados y hasta los argumentos son dados por el docente quien prioriza una clase magistral.
- No se hace uso de situaciones problema introductorias que den sentido a los conceptos, esto impide dar un significado más profundo al concepto.
- Las interacciones entre docente y estudiante en su mayoría estuvieron centradas en aclarar dudas sobre la explicación dada por el docente. No hubo espacio de interacción entre estudiantes y la argumentación por parte de los estudiantes es casi inexistente.

En cuanto a conclusiones de mejora**,** en las dos trayectorias didácticas, el *método gráfico* se utilizó como el "mecanismo" conceptual para estudiar los tipos de solución y se toma como un método que se trabaja aparte de los métodos algebraicos. Esto al parecer es una problemática muy común, de acuerdo a Mora (2001), este afán por trabajar los métodos algebraicos, hace que los docentes eviten explorar ejercicios de sistemas de ecuaciones sin solución o con soluciones infinitas, porque buscan que los estudiantes no se enfrenten a expresiones como $0 = 0$ y $0 = a$, $a \in \mathbb{R}$, lo que conlleva a dificultades cuando ellos deban interpretar estos tipos de soluciones. Autores como Vega, Zaldivar y Londoño (2017) y Lasa (2015) establecen que la representación gráfica permite al estudiante un proceso de visualización para dar representatividad a este tipo de soluciones. Lo que implica que desde el campo de la didáctica, se debe pensar que el método gráfico debe enseñarse de manera paralela a los métodos algebraicos y no como un método aparte.

Finalmente, se quiere destacar que esta caracterización es utilizada como instrumento para que los profesores indaguen sobre sus propias prácticas de aula. De acuerdo al análisis didáctico realizado a los profesores, se destacan algunas configuraciones didácticas que sirven como episodios para utilizar en una etapa posterior. La CD 11, del profesor 1, quien pregunta *¿Cómo se identifica que un sistema tiene soluciones infinitas sin necesidad de graficar?* Si bien se dio de manera improvisada y fue finalmente contestada por él, es un tipo de pregunta que difieren de lo visto en las diferentes CD, porque busca conjeturar una propiedad que exige la traducción de la representación gráfica a la simbólica de los sistemas de ecuaciones lineales, un aspecto que es destacado por Alcocer (2007). Por otro lado, se destaca las configuraciones didácticas 13 a la 15, cuya tarea era determinar el valor de verdad de una proposición. Estas configuraciones se seleccionaron por dos aspectos: en primer lugar, permiten mostrar cómo una tarea puede exigir *procesos matemáticos* distintos a *mecanizar* y cómo las prácticas de aula podrían cambiar para dar organización a la resolución de las mismas.

Referencias

Alcocer, I. (2007). *Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraicos y geométricos*. Cinestav, IPN.

Cohen, L., y Maníon, L. (1999). *Método de investigación educativa*. La Muralla.

Font, V., Godino, J. D., y Contreras, A. (2008). From Representations to Ontosemiotic Configurations in Analysing the Mathematics Teaching and Learning Processes. *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, Historicity Clasroom and Culture*, 157–173. https://www.researchgate.net/publication/282325819

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *8*(11), 111–132. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_2013_idoneidad_didactica.pdf

Godino, J, Font, V., WIlhelmi, M., y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de Las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D. (2012). Origen Y Aportaciones De La Perspectiva Ontosemiótica De Investigación En Didáctica Matemática. *Investigación En Educación Matemática XVI*, 49–68. http://funes.uniandes.edu.co/11194/2/Godino2012Origen.pdf

Hernández, R., Férnandez, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill Education.

Lasa, A. (2015). *Instrumentación del medio material Geogebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones* [Univertsidad Pública de Navarra]. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Aitzol-Lasa_Tesis2015.pdf

Martínez-Rizo, F. (2012). Procedimientos para el estudio de las prácticas docentes. revisión de la literatura. *RELIEVE - Revista Electronica de Investigacion y Evaluacion Educativa*, *18*(1), 1–22. https://doi.org/10.7203/relieve...2976

Mora, B. (2001). *Modos de pensamiento en la interpretación de la solución de sistemas de ecuaciones lineales*. Cinestav IPN.

Pochulu, M., y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *14*(3), 361–394.

Vega, B., Zaldivar, J., y Londoño, N. (2017). Una propuesta didáctica para la solución de un sistema de ecuaciones lineales a través de la visualización. *CLAME- Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, 709–718. http://funes.uniandes.edu.co/12269/1/Vega2017Una.pdf