



## ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DERIVADA Y EL LÍMITE APOYADA CON RECURSOS DIGITALES

Teaching and Learning of the Derivative and the Supported Limit with Digital Resources

LUCIA GUTIÉRREZ MENDOZA

Universidad Militar Nueva Granada, Colombia

---

### KEY WORDS

*Digital Resources*  
*Variational Calculation*  
*Limit*  
*Derivative GeoGebra*

### ABSTRACT

*This research work, exploratory type, focuses on the teaching of the concept of the limit and the derivative, from didactic strategies supported by digital resources (Geogebra), in order to improve the teaching-learning processes and mathematical skills of students who take the subject of differential calculus. The practices were developed with engineering students from the Universidad Militar Nueva Granada; in the first part, limits and derivative exercises were developed in pencil and paper, and in a second part, Geogebra worked with the calculation of some limits following the given instructions.*

---

### PALABRAS CLAVE

*Recursos digitales*  
*Cálculo variacional*  
*Limite*  
*Derivada*  
*GeoGebra*

### RESUMEN

*Este trabajo de investigación, de tipo exploratoria, se centra en la enseñanza del concepto del límite y la derivada, a partir de estrategias didácticas apoyadas con recursos digitales (Geogebra), con el fin de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y las competencias matemáticas de los estudiantes que cursan la asignatura de cálculo diferencial. Las prácticas se desarrollaron con estudiantes de ingeniería de la Universidad Militar Nueva Granada; en una primera parte se desarrollaron ejercicios de límites y derivadas a lápiz y papel, y en una segunda parte se trabajó con Geogebra el cálculo de algunos límites siguiendo las instrucciones dadas.*

## Introducción

Este artículo, se centra en la didáctica de las matemáticas apoyada con recursos digitales, tomando como herramienta (GeoGebra) para la enseñanza del concepto del límite y la derivada con enfoque desde el concepto del límite; el interés se debe a las dificultades que presentan los estudiantes de ingeniería y de otros programas de formación a nivel superior (técnicos y tecnólogos) que se imparten en la Universidad Militar Nueva Granada (UMNG), dificultades que se reflejan en el aprendizaje, en la falta de motivación por los mismos contenidos o por porque las prácticas de enseñanza en el aula no son las adecuadas, lo que a veces termina con un bajo rendimiento académico por parte de los estudiantes cuyas competencias adquiridas son mínimas o por debajo de las requeridas para cursar asignaturas de mayor complejidad.

Algunas investigaciones sobre el aprendizaje del concepto del límite y la derivada a partir del concepto del límite está influenciada según Valls, Pons y Llinares (2011), por cuatro características: las concepciones que tienen los estudiantes sobre el concepto, las dificultades que se presentan en el momento de comprender el concepto del límite, la influencia de las diferentes representaciones y los conceptos que los estudiantes realizan sobre cada representación referente al límite y la influencia de la concepción dinámica la cual está implícitamente dentro de la misma definición: el límite sí existe y su valor es  $L$ , cada vez que  $x$  se aproxima a un punto fijo  $C$ , estos factores pueden actuar favorable o desfavorablemente en el aprendizaje de los estudiantes.

En un ejercicio de análisis y reflexión sobre la realidad de nuestros estudiantes y las prácticas de aula, donde fundamentan los conceptos básicos del cálculo diferencial, se trata de mejorar los procesos de enseñanza apoyado con recursos digitales para minimizar las dificultades antes mencionadas, por lo cual se propone el proyecto "Enseñanza del concepto de límite con TIC" financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones de la UMNG (CIAS 2308). Como una primera parte del proyecto se ha podido indagar algunas causas del problema, unas asociadas a la repetición de fórmulas y ejercicios técnicos sin llegar a una comprensión de los conceptos y otras que están asociadas al concepto del infinitesimal, infinito y la convergencia, (conceptos complejos de entender) y otras relacionadas al pensamiento variacional, al cambio de un evento el cual es descrito por el cambio de variables dependientes o independientes, la derivada, la recta tangencial; el cálculo diferencial e integral están asociados a la matemática de la variación y del cambio, en donde indudablemente están involucradas las variables, el concepto de

función, el límite y las derivadas (Dolores, 2010), proceso caracterizado por un estilo de razonamiento lógico, numérico, geométrico y analítico.

Las estrategias didácticas son entendidas como la implementación de actividades para que permitan el desarrollo de habilidades y potencialidades de un grupo de individuos apoyándose con un conjunto de herramientas o recursos didácticos.

por lo cual se presenta la importancia de diseñar estrategias didácticas para apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la derivada y el concepto de límite a partir de recursos digitales, que permita a los estudiantes realizar prácticas dinámicas e interactivas para explorar conceptos y reproducir procesos de matematización, modelación; con la implementación de la tecnología se pueden realizar actividades interactivas para mejorar y fortalecer procesos del pensamiento variacional, rompiendo los esquemas estáticos del modelo tradicional en el cual el pensamiento variacional queda un poco limitado al exponer los temas en recetario de fórmulas, propiedades, definiciones, y teoremas, tomando como base en algunos casos gráficas (no dinámicas) y desarrollo de algoritmos caracterizados en el desarrollo de ejercicios técnicos sin privilegiar los procesos de comprensión, análisis, resolución de problemas y transformaciones.

## El pensamiento variacional, el concepto del límite y la derivada

De acuerdo a los lineamientos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación en Colombia (MEN, 2006), se distinguen cinco procesos importantes del que hacer matemático: formular y resolver problemas, modelar fenómenos del contexto, comunicar, razonar, formular y ejercitar procedimientos y algoritmos, estos procesos en sus diferentes niveles son los requeridos para que un estudiante desarrolle habilidades y sea matemáticamente competente, estos estándares a su vez están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático: el pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional.

En el pensamiento variacional están presentes los procesos de cambio, el concepto de variable, el cual requiere de diferentes sistemas: el sistema numérico para registrar los cambios numéricamente, el sistema algebraico como una forma de representación y modelación del fenómeno en cuestión y del sistema geométrico para representar gráficamente el fenómeno de variación, entendiéndose por variación como el proceso de cambio el cual percibe el individuo y lo conduce a pensar dinámicamente, según Vasco

(2010) el pensamiento variacional se refiere al proceso de pensar de manera dinámica, para poder percibir lo que cambia y lo que se mantiene constante, para que luego sea posible llegar a un proceso de modelación bajo el esquema de relaciones numéricas y transformaciones con sus correspondientes clasificaciones y representaciones algebraicas y gráficas.

Aprender la definición de función una variable real como la relación entre dos variables numéricas  $x$  e  $y$ , hablar del dominio o codominio de una función, dibujar sus representaciones gráficas o memorizar un conjunto de fórmulas referentes al concepto del límite, sus reglas, o reemplazar valores en las expresiones algebraicas, no significa que el estudiante realice procesos que estimulen el desarrollo del pensamiento variacional, por el contrario, esto se convierte en un obstáculo (Vasco, 2010), utilizar los sistemas geométricos y espaciales tampoco garantiza el desarrollo del pensamiento variacional, es claro que en los sistemas de representación se manipulan diferentes objetos, unos en el plano cartesiano en forma de gráficas estáticas (sin movimiento ni cambio), otros son las ecuaciones, las funciones, etc., objetos que por sí solos a veces no determinan el concepto de variación y no permite comprender el concepto del límite o de la derivada de la función un punto específico; desde luego que el pensamiento variacional está relacionado con el sistema numérico, el sistema espacial y el sistema métrico, pero el desarrollo del pensamiento variacional va más a fondo, tiene que ver con la percepción, con las relaciones, con la identificación de la variación y el cambio en diferentes contextos.

Al abordar la derivada a partir del concepto del límite, es primordial comprender el concepto del límite no desde el punto de vista de su definición épsilon y delta, sino como un proceso de cambio que posibilite el desarrollo del pensamiento variacional.

El concepto del límite, sin lugar a dudas requiere de la formación de conceptos matemáticos, de teoremas y reglas fundamentales hasta lograr la resolución de problemas, pero en el proceso de enseñanza se debería partir de fenómenos que están en constante cambio, luego realizar un registro numérico que posibilite analizar la variación del fenómeno y luego llegar a la modelación, complementando con los teoremas y conceptos fundamentales que demanda el rigor de las matemáticas.

En este sentido, está en juego un tipo propio de razonamiento, que posibilite el análisis de situaciones que involucren el cambio, las aproximaciones numéricas y la modelación por medio de funciones  $f(x)$  de una variable real; es claro que esta estrategia demanda más tiempo de trabajo directo con los estudiantes, teniendo en cuenta el contenido y los conceptos, enseñanza que

se torna mucho más complejo cuando se enseña la derivada a partir del concepto del límite, proceso difícil de entender para los estudiantes, y mucho más cuando se aborda la derivada para funciones elementales (trigonométricas y exponenciales) a partir del concepto del límite, de acuerdo con Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., y Font Moll, V. (2012).

### Propuesta didáctica apoyada con recursos digitales

Es preciso mencionar la importancia de incorporar las herramientas ofrecidas por las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), en las aulas de clase, en particular para la enseñanza de las matemáticas, es un asunto de análisis y reflexión en la formación de las nuevas generaciones de profesionales en ingeniería y carreras afines, cuyo rol en la sociedad está marcado por afrontar retos y problemas específicos de su oficio u ocupación laboral y los requerimientos que demanda la globalización y la sociedad del conocimiento. No se trata de incorporar las TIC en las aulas porque sí, es significativo aplicar estrategias que posibiliten la discusión, la abstracción y el análisis de los conceptos matemáticos.

Como parte del cambio y soporte a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el departamento de Matemáticas de la Universidad Militar Nueva Granada, cuenta con la plataforma Moodle, para que los docentes diseñen y organicen cursos virtuales correspondientes a sus asignaturas, sin embargo, en el área de matemáticas se deben buscar otros recursos digitales que posibiliten la interactividad y generen ambientes de aprendizaje donde el estudiante sea el eje central del proceso.

Si bien es cierto que se han realizado diversidad de investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas en la UMNG y en otros centros educativos, también es cierto que en muchas Instituciones de Educación superior (IES) se continúan desarrollando prácticas de aula con el modelo tradicional, donde a partir de un listado de temas estructurados en el curriculum (para el caso del cálculo diferencial), se exponen a los estudiantes y luego se refuerza el conocimiento con el desarrollo repetitivo de ejercicios sobre límites y derivadas, en otros casos se hace uso de las herramientas ofrecidas por las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) sin generar procesos de cambio e innovación, por el contrario las TIC se utilizan para potencializar el modelo tradicional desarrollando las mismas dinámicas en un computador, en otros casos se han utilizado las TIC para innovar estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Hernandes y Da Silva (2008), consideran que el uso de la tecnología por parte de los estudiantes y

docentes, proporciona una forma diferente de adquirir y de explorar los conceptos matemáticos.

Vasco (2010), argumenta que el uso de las TIC, permite nuevos momentos y ambientes de aprendizaje, apropiado y potente para el desarrollo del pensamiento variacional.

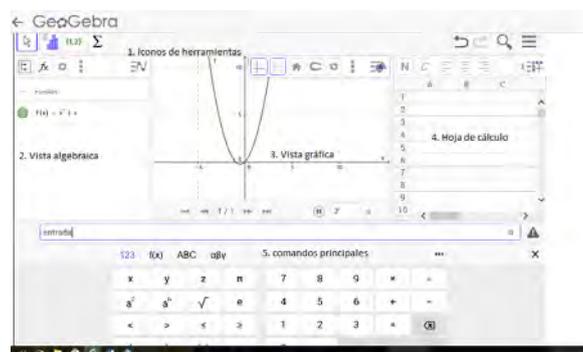
En esta parte del trabajo, se intenta, con el uso de GeoGebra dentro del aula de clase, que el estudiante conceptualice el concepto del límite por aproximación gráfica y numérica y que comprenda el concepto de variación el cual está implícito en su definición.

En este sentido, en el trabajo se proponen los siguientes objetivos: diseñar actividades basada en un conjunto de prácticas utilizando el software GeoGebra (el cual será descargado en los celulares) para la enseñanza del concepto del límite y la derivada para estudiantes de ingeniería (Mecatrónica, Civil, Telecomunicaciones e Industrial) que cursan cálculo diferencial en el segundo semestre de sus carreras; analizar el impacto que se tiene al utilizar el software, en el que se hace hincapié en el concepto del límite como proceso de variación a partir de la aproximación desde el sistema de representación numérico y gráfico y por último analizar el comportamiento de los estudiantes con el uso del celular dentro del aula de clase.

## Porqué GeoGebra

Teniendo en cuenta los objetivos, el desarrollo de las competencias (en los estudiantes) correspondientes a la asignatura del cálculo diferencial y las políticas institucionales, se propone como estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de límite y la derivada, el uso del software de matemáticas GeoGebra, el cual posibilita su uso de manera dinámica en todos los niveles de la educación superior, permite que los estudiantes manipulen diferentes objetos matemáticos y proporciona al estudiante espacios de variación y cambio desde el punto de vista geométrico y numérico a través de la programación de los deslizadores.

Figura 1. Interfaz en GeoGebra.



Fuente(s): pantalla tomada de GeoGebra y modificada por el autor.

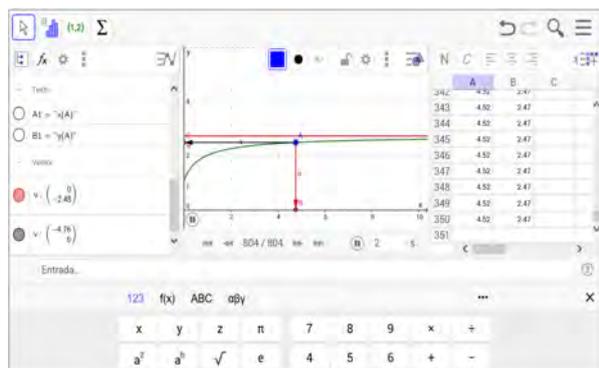
Con este software, es posible escribir expresiones algebraicas, lógicas y numéricas, se pueden representar diferentes tipos de curvas en coordenadas polares y cartesianas, como rectas, elipses, circunferencias y todo tipo de funciones de manera general (trigonométricas, polinómicas, exponenciales, hiperbólicas, racionales y funciones por partes), la pantalla de este software es amigable y de fácil acceso para los usuarios, en su pantalla se hallan de manera visible diferentes íconos que hacen referencia a un conjunto de herramientas básicas para su manejo y ejecución de procesos (ver figura 1), entre éstas se tiene el menú, la caja de herramientas (parte superior), por otro lado se puede tener a la vista la parte algebraica (lado izquierdo), la parte gráfica (lado derecho) y la hoja de cálculo, además en la parte inferior se encuentra la barra de entrada (comandos, operadores, letras griegas, etc). Dentro de sus herramientas, específicamente se encuentran algunos objetos de manipulación (desplaza, rota, crea puntos, genera rectas, circunferencias, etc.); la herramienta desplazar entre otras, posibilita desplazar las gráficas, un punto, una recta o el plano cartesiano (esto facilita visualizar el plano cartesiano en su totalidad o por partes), se pueden rotar objetos y crear deslizadores.

El deslizador se visualiza gráficamente como un segmento de recta (dial), donde cambia de manera autónoma un número, para ajustar el valor del número, la ventana emergente permite asignar un nombre, especificar un intervalo, y definir el incremento del valor correspondiente, además que permite programar una animación con diferentes velocidades; Con la animación es posible mover un objeto sobre cualquier trayectoria, esto permite crear algunos cambios de velocidad o dirección del movimiento.

Esta herramienta conocida como deslizador, se ha tomado como base para enseñar el concepto de límite y de la derivada de una función, teniendo en cuenta que es posible escribir una función, visualizar su representación algebraica, su representación gráfica y tabular en GeoGebra; utilizando el deslizador el cual se le asigna un nombre con una letra en minúscula (a), se puede calcular el límite de una función.

Dentro de la práctica de aula, se desarrolla una metodología de tipo exploratoria, para realizar un estudio sobre la interacción que realizan los estudiantes con los diferentes herramientas en GeoGebra; como una primera parte del proceso, se lleva a cabo el desarrollo de un taller donde los estudiantes deben calcular una serie de ejercicios sobre límites a lápiz y papel (modelo tradicional), en una segunda etapa se trabaja con el software GeoGebra para calcular algunos límites de funciones propuestas, siguiendo las instrucciones dadas.

Figura 2. Límite de la función  $f(x)$  realizado en GeoGebra.



Fuente(s): Imagen tomada por el autor en <https://www.geogebra.org/m/YhMm8vgX>

En la figura 2, se puede observar la representación algebraica y gráfica de la función dada, de manera explorativa, se analiza el trabajo que desarrollan los estudiantes, a partir del taller entregado, ellos comenzaron a realizar conjeturas, a identificar las variables independientes y dependientes y realizar diferentes tipos de análisis, como las distancias que recorren las variables, independiente ( $x$ ) o el punto B y la variable dependiente ( $y$ ) o el punto C, la velocidad con la que se mueven dichas variables y la forma como se mueve el punto coordenado  $A=(x,y)$ , todo esto al momento de ejecutar la animación del deslizador en la interfaz de GeoGebra.

Se les pidió a los estudiantes, que hablaran sobre los objetos matemáticos identificados, sobre la variación y concluyeran sobre la convergencia del o (los) límites presentados.

## Conclusiones

De acuerdo a los objetivos definidos en la estrategia didáctica, a continuación se exponen las conclusiones a partir de los mismos.

En cuanto al diseño de las actividades, éstas se diseñaron teniendo en cuenta los lineamientos curriculares establecidos por el MEN y dando cumplimiento a los estándares básicos de las competencias matemáticas para las Instituciones de

Educación Superior (IES). El material se diseñó para apoyar y orientar las clases presenciales de 6 horas con los estudiantes a cargo. El trabajo con este material se potencializa y amplía con el uso del software GeoGebra.

Desde el enfoque por competencias, se pudo observar en los estudiantes, argumentaciones que realizaron y los diversos procesos matemáticos a partir de las diferentes representaciones (numérica, gráfica), para poder determinar la solución de los límites de las funciones dadas, por otro lado la parte visual e interactiva ha posibilitado un saber perceptible y dinámico sobre la convergencia de un límite o su divergencia, lo que nos permite inferir que los estudiantes evaluaron un proceso secuencial que los indujo a un proceso de pensamiento variacional.

Con el deslizador de GeoGebra, se facilita el análisis gráfico y dinámico para aproximar a la solución de límites, pero no se logra la construcción formal del concepto de límite (épsilon y delta).

El uso de recursos tecnológicos, si bien favorecen algunos procesos de aprendizaje y desarrollo del pensamiento variacional, éstos se deben complementar con el trabajo del lápiz y papel, con el fin de avanzar a la construcción de significados.

Un adecuado uso de la tecnología en el aula de clase de matemáticas, favorece la motivación de los estudiantes, mejora los tiempos de trabajo en el aula, lo cual permite realizar más ejercicios e indagar sobre otros conceptos matemáticos, como la razón de cambio, la velocidad, la distancia, etc. En este caso los estudiantes estuvieron más participativos, más activos, realizaron más preguntas y realizaron más proposiciones sobre el concepto del límite.

El desarrollo de la tecnología parece no tener límite, por lo cual resulta favorable su uso de una forma didáctica bajo un enfoque pedagógico que posibilite el desarrollo de competencias tecnológicas y el desarrollo de procesos del pensamiento variacional.

## Referencias

- Dolores Flores, C. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la información. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 241-254.
- Hernandes, G.; Da Silva, S. (1989). La representación gráfica de la recta con respecto a una función para un punto específico utilizando el software Winplot. *Electronic Proceedings of the Eleventh international Congress on Mathematical Education Mexico*.
- Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. *MEN*. Bogotá, 46-95.
- Robles Arredondo, M. G., Del Castillo Bojórquez, A. G., & Font Moll, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación matemática*, 24(1), 35-71.
- Valls, J.; Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las ciencias*, 29(3), pp. 325-338.
- Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM-Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau (Vol. 9).